INSTITUTO DE ENSEÑANZA SUPERIOR MONTEROS

Carrera: Profesorado de Educación Secundaria en Matemática

CUADERNILLO DE INGRESO

2023

ÍNDICE:

PALABRAS DE BIENVENIDA

Estimados ingresantes:

Comenzar una carrera en el nivel superior es, sin duda alguna un gran desafío que implica esfuerzo, compromiso y responsabilidad. Pero en esta tarea no estarán solos, la comunidad educativa de nuestro IES los acompañará permanentemente para alcanzar la meta ansiada: la formación de ciudadanos profesionales docentes y educados integralmente comprometidos con la construcción de una sociedad plural y democrática.

En este sentido, hoy comienzan una nueva etapa de formación, de construcción; donde van a ser arquitectos de su propia trayectoria.

Nuestro acompañamiento a esa formación estará presente a través de diversas estrategias que los llevarán a discutir, consensuar y debatir problemas de nuestra realidad. Generaremos encuentros para conocernos, reconocernos, y colaborarnos. Para ello nos es grato presentarles un material seleccionado con el fin de preparar esta primera instancia de acercamiento a la institución.

Gracias por participar de nuestro proyecto y por confiar en nosotros, por elegirnos. Les deseamos el mayor de los éxitos y recuerden esta célebre frase:

“Hay una fuerza motriz más poderosa que el vapor, la electricidad y la energía atómica: la voluntad.”

(Albert Einstein)

COMUNIDAD EDUCATIVA

Autoridades:

- **Directora:** Prof. Lic. Mirta Liliana Nieva
- **Secretaria:** Prof. Claudia del Valle Mentz
- **Coordinador de Carrera (Geografía):** Prof. Jaime Rossana
- **Coordinador de Carrera (Matemática):** Prof. Claudia del Valle Pedraza
- **Coordinador de Prácticas:** Prof. Ivana Chávez
- **Coordinador Turno Tarde:** Prof. María Victoria Castro
- **Coordinador de TICS:** Prof. Marcelo Fabio Catania
- **Referente digital:** Prof. Marcelo Aciar

Preceptores:

- **Preceptores turno tarde:** Mentz Claudia, Correa Mirta
- **Preceptores turno noche:** Ruiz Julio, Gladys González, Santana Navor

Ayudantes de Trabajos Prácticos:

- **De Geografía:** Prof. Nancy Ibarra
- **De Matemáticas:** Prof. Analía Escobar

CANALES DE COMUNICACIÓN

- **Nodo Instituto Nacional de Formación Docente:** https://iesm-tuc.infd.edu.ar/sitio/
- **Perfil de Facebook: Superior Monteros**
- **Correo electrónico:** iesmonteros@yahoo.com.ar

DIRECCIÓN: San Martin 145 – Monteros

Horarios de atención: 13:00 a 17:50 - 18:00 a 22:50

OFERTA EDUCATIVA

Turno Tarde:

13:00 a 17:50 horas – Profesorado de Educación Secundaria en Matemática

Turno Noche:

18:00 a 22:50 horas - Profesorado de Educación Secundaria en Matemática y Profesorado de Educación Secundaria en Geografía.

TALLER DE INGRESO

A dictarse entre el 22/02/23 al 15/03/23, los días lunes, miércoles y viernes, de 18hs a 21hs.

Observación: estar atentos a los canales de comunicación por cualquier modificación de fechas.

EVALUACIÓN

- Cumplir con el 70% de asistencia a curso de ingreso 2023
- 100% de trabajos prácticos presentados
- Trabajo práctico integral aprobado

Criterios de Evaluación

Capacidad para:

- Identificación y resolución de problemas en los distintos campos del conocimiento.
- Expresar ideas y relaciones matemáticas utilizando la terminología y notación apropiada.
- Asimilación y aplicación a la práctica de los conceptos trabajados.

Actitudes de:

- De responsabilidad en las actividades planteadas y asistencia a los diversos encuentros propuestos.
- De respeto por las normas institucionales.
- De ejercicio efectivo del trabajo conjunto.

Cupo para cada 1º Año: 70 alumnos.

DOSSIER DE CONTENIDOS

Introducción

Esta propuesta de ambientación está destinada a los ingresantes de la carrera del profesorado de matemática, y constituye el primer acercamiento al ámbito académico de la enseñanza superior. Esta propuesta ha sido preparada para que el aspirante pueda comprender de manera global la Matemática como ciencia y como disciplina escolar. Asimismo, se espera que el presente dossier, y las actividades propuestas ayude a comprender las cuestiones centrales planteadas por Matemática y recuperadas a lo largo del desarrollo del presente taller de nivelación.

Objetivos:

- Brindar a los postulantes herramientas conceptuales, actitudinales y procedimentales que le sean útiles para transitar la carrera.

CONTENIDOS:

UNIDAD N°1: ELEMENTOS DE ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

UNIDAD N°2: GEOMETRÍA

UNIDAD N°3: TRIGONOMETRÍA

Símbolos Matemáticos

$=$	igual a	$\wedge$	y
$\neq$	no es igual a	$\vee$	o, en sentido inclusivo
$\cong$	aproximado a	$\underline{\vee}$	o, en sentido exclusivo
$<$	menor que	$\Rightarrow$	implica (condición necesaria)
$\nless$	no es menor que	$\Leftrightarrow$	Implica doblemente(condición necesaria y suficiente)
$>$	mayor que	$\therefore$	Por lo tanto ; en consecuencia
$\ngtr$	no es mayor que	$/$	Tal que
$\leq$	menor o igual que	$\exists$	Existe
$\geq$	mayor o igual que	$\forall$	Para todo
$\pm$	mas o menos	$\in$	Pertenece
∞	Infinito	$\subseteq$	Incluído en
$\propto$	proporcional a	$\subset$	Incluído estrictamente en
$//$	paralelo a	$\supseteq$	Incluye a
$\perp$	perpendicular a	$\supset$	Incluye estrictamente a
$\measuredangle$	ángulo	$\cup$	Unión o junta
$\llcorner$	ángulo recto	$\cap$	Intersección o reunión

ALFABETO GRIEGO

MAYÚSCULAS	minúsculas	nombre español	Letra latina
Α	α	Alfa	A
Β	β	Beta	B
Γ	γ	Gamma	G (ga,gue,..)
Δ	δ	Delta	D
Ε	ε	Épsilon	E (breve)
Ζ	ζ	Dseta	Ds
Η	η	Eta	E (larga)
Θ	θ	Zeta	Z (za, ce,...)
Ι	ι	Iota	I
Κ	κ	Kappa	K (ca, ke,..)
Λ	λ	Lambda	L
Μ	μ	Mi	M
Ν	ν	Ni	N
Ξ	ξ	Xi	X (=ks)
Ο	ο	Ómicron	O (breve)
Π	π	Pi	P
Ρ	ρ	Rho	R, rr
Σ	σ, ς	Sigma	S (ς al final)
Τ	τ	Tau	T
Υ	υ	Ípsilon	I (u francesa)
Φ	φ	Fi	F
Χ	χ	Ji	J (kh)
Ψ	ψ	Psi	Ps
Ω	ω	Omega	O (larga)

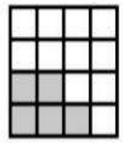
UNIDAD 1: ELEMENTOS DE ARITMETICA Y ALGEBRA

UNIDAD 1 a. Repasando….

REGLA DE TRES SIMPLE

✓ **Razones:** Una razón es un cociente entre dos magnitudes o valores que están relacionados entre sí.

Ejemplos: *Por cada 5 cuadraditos sombreados tenemos 11 cuadraditos blancos*



⇒ *La razón entre los cuadraditos sombreados y los cuadraditos blancos es:* $\frac{5}{11}$

Cinco Personas tardan 8 días en realizar un determinado trabajo: ⇒ *La razón entre las personas que realizan el trabajo y los días que tardan es:* $\frac{5}{8}$

✓ **Proporcionalidad:** Cuando se igualan dos razones, decimos que existe una proporcionalidad.

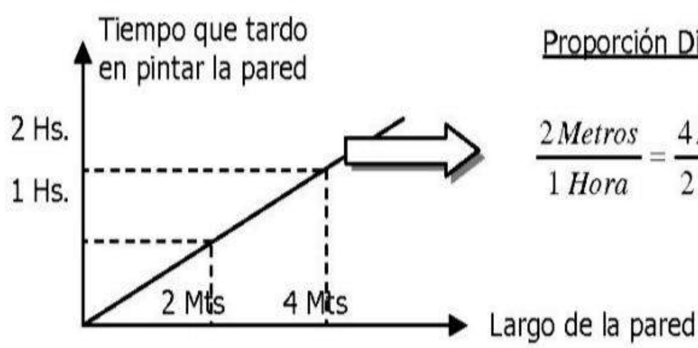
Pero hay que tener cuidado en la forma que escribimos esta igualdad, ya que hay dos tipos distintos de proporcionalidad:

➢ **Magnitudes Directamente Proporcionales**

Las magnitudes **DIRECTAMENTE** proporcionales son las que al aumentar una aumenta proporcionalmente la otra (es decir que por ejemplo, si una se duplica, la otra también se duplica) o *al disminuir una disminuye proporcionalmente la otra.*

Por ejemplo: El tiempo que tardo en pintar una pared y el largo de la pared, queda claro que mientras ***más*** *larga sea la pared,* ***más*** *tiempo voy a tardar en pintarla.* (O que por ejemplo si la pared fuera el doble de larga, tardaría el doble en pintarla)

En el gráfico se ve muy claro que mientras más larga sea la pared, más tiempo voy a tardar.. ⇒



⇒ Proporción Directa:

$$\frac{2\,Metros}{1\,Hora} = \frac{4\,Metros}{2\,Horas}$$

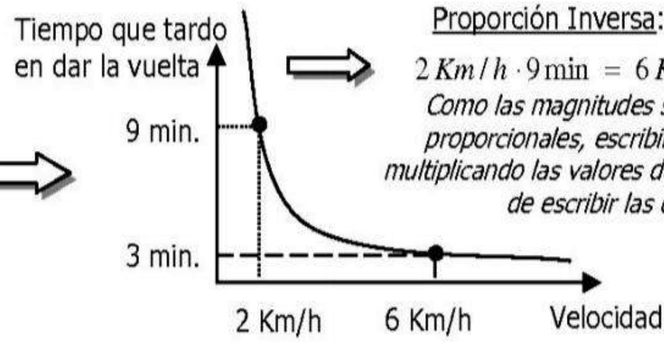
Ojo con la proporcionalidad!!! En muchos casos vamos a ver que hay dos magnitudes en las que al aumentar una, también aumenta la otra y no son precisamente directamente proporcionales. Un ejemplo de este tipo de magnitudes son "el lado de un cuadrado y su área" por ejemplo si el lado de un cuadrado vale 5 cm, su área será $25cm^2$, pero si su lado vale el doble, o sea 10 cm, su área vale $100\ cm^2$, que es el cuádruple. En este caso aumenta una magnitud y también aumenta la otra, pero no aumenta proporcionalmente, por lo tanto **NO** son directamente proporcionales.

- **Magnitudes <u>Inversamente</u> Proporcionales**

Las magnitudes **INVERSAMENTE** proporcionales son las que al aumentar una disminuye proporcionalmente la otra o *al disminuir una aumenta proporcionalmente la otra.* (Por eso Inversa)

*Por ejemplo: El tiempo que tardo en dar una vuelta a la manzana y la velocidad con que lo haga, mientras **mas** rápido corra **menos** voy a tardar.. (Y es proporcional porque si voy el doble de rápido, tardaré la mitad del tiempo)*

*En el gráfico se ve muy claro que mientras **más** rápido corra, **menos** tiempo voy a tardar..*



Proporción Inversa:

$$2\,Km/h \cdot 9\min = 6\,Km/h \cdot 3\min$$

Como las magnitudes son Inversamente proporcionales, escribimos la proporción multiplicando las valores de cada razón en lugar de escribir las divisiones.

¿Qué es la Regla de Tres Simple? **Es un método para calcular Magnitudes Proporcionales.**

Cuando las MAGNITUDES son DIRECTAMENTE PROPORCIONALES, es **Regla de Tres Simple DIRECTA**.

Cuando las MAGNITUDES son INVERSAMENTE PROPORCIONALES, es **Regla de Tres Simple INVERSA**.

- Regla de Tres Simple **Directa**:

Ejemplo: Calcular el tiempo que tardo en pintar una pared de 3 metros si para pintar una de 2 metros tardé 6 horas.

Es DIRECTA porque a **MAS** larga, **MAS** voy a tardar (Y es proporcional, porque si tengo que pintar por ejemplo, exactamente el doble, tardaría exactamente el doble)

Planteo:

2 metros ⟶ 6 Horas ⇢ En la 1ª Línea escribo el DATO que me dan: "Para pintar una pared de 2 metros tardé 6 horas"

3 metros ⟶ X Horas ⇢ En la 2ª Línea escribo lo que tengo que calcular: ¿Cuántas horas tardaré (**X**) para pintar 3 metros?

Planteo la proporción Directa:

$$\frac{2\,Metros}{6\,Horas} = \frac{3\,Metros}{X}$$

Paso los términos que están dividiendo, multiplicando para el otro lado del igual: $2\,Metros \cdot X = 3\,Metros \cdot 6\,Horas$

Paso el término que está multiplicando a la X, dividiendo para el otro lado del igual

$$X = \frac{6\ horas \bullet 3\ \cancel{metros}}{2\ \cancel{metros}} \Rightarrow X = \frac{\overset{3}{\cancel{6}}\,Hs \cdot 3}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 9\ Horas$$

Esta es la respuesta final: Para pintar la pared de 3 metros tardo 9 horas.

Regla de Tres Simple **INVERSA**:

Ejemplo: Calcular el tiempo que tardan 5 personas en pintar una pared, si sabemos que 3 personas tardan 40 minutos. ⇨ Es INVERSA porque a **MAS** personas, **MENOS** van a tardar (Y es proporcional porque si fueran exactamente el doble de personas, tardarían exactamente la mitad del tiempo)

Planteo:

3 personas ⟶ 40 minutos - - - ▶ En la 1ª Línea escribo el DATO: "3 Personas tardan 40 minutos"

5 Personas ⟶ X - - - - - - - - ▶ En la 2ª Línea escribo lo que tengo que calcular.

Planteo la proporción Inversa:

$$3\ personas \bullet 40\ minutos = 5\ personas \bullet X$$

⇨ Paso el término que está multiplicando a la X, dividiendo para el otro lado del igual

$$X = \frac{3\ personas \bullet 40\ minutos}{5\ personas}$$

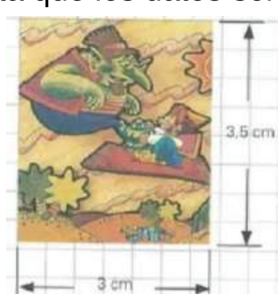
⇨ Simplifico y Resuelvo ⇨

$$X = \frac{3\ \cancel{personas} \bullet \overset{8}{\cancel{40}}\ minutos}{\underset{1}{\cancel{5}}\ \cancel{personas}} = 24\ minutos$$

Esta es la respuesta final: Las 5 personas tardarán 24 minutos.

ACTIVIDADES

1) Lucas dejó en la imprenta este dibujo para que se lo amplíen. Cuando retiró las copias, se dio cuenta que algunas no estaban bien porque la razón entre el ancho y el alto no era la misma que en el dibujo original. Revisa las medidas de las copias e indica cuál o cuáles están mal. Tené en cuenta que los datos son de ancho por alto.
   a. 30cm x 25cm
   b. 24cm x 14cm
   c. 15cm x 17,5cm
   d. 45cm x 52,5cm



2) De una tela de 12 metros se hicieron 18 remeras. ¿Cuántas remeras se harán de una remera de 14 metros?
3) Si por 3kg de mazana se paga $650. ¿Cuánto se pagará por 10kg de manzana?
4) Para vaciar un estanque de 5 bombas de desagote, se tarda 14 horas.
   a. ¿Cuántas horas y minutos demandará hacerlo solamente con 4 de esas mismas bombas?

b. ¿Y si son 8 las bombas?

5) Un granjero calcula que las provisiones de comida que tiene para sus 12 cerdos le durarán 18 días. Si vende 3 cerdos en ese momento ¿para cuántos días le durarán entonces sus provisiones?
6) Un auto FIAT UNO, consume aproximadamente 12,5 litros de nafta para recorrer 112,5km. ¿Cuántos litros de nafta necesitaría para recorrer 360km?
7) Para emparejar el césped de la cancha de la cancha de River, con una maquina se hace el trabajo en 8 horas. Si hay poco tiempo y se necesita que en un lapso de 2 horas se haga ese trabajo, ¿cuántas máquinas cortadoras se deberían usar simultáneamente?
8) Enrique ayuda a unos familiares en su tienda en navidad. Por cada 5 días recibe $8.000. ¿Cuánto le darán por 17 días?
9) Cinco obreros hacen una pared en 15 días. ¿cuánto tardarán tres obreros en hacer la misma pared?
10) Un deportista recorre 4.500 metros en 10 minutos. ¿Cuántos km recorrerá en media hora?

ECUACIONES

Una **ecuación** es una igualdad en la que hay, por lo menos, un dato desconocido, es decir, una incógnita, y resolverla significa encontrar el o los valores de la incógnita que hacen verdadera la igualdad.

En toda ecuación se distinguen dos miembros en la igualdad

$$\underbrace{2x+7+x-1}_{\text{Primer miembro de la igualdad}}=\underbrace{12-x+2}_{\text{Segundo miembro de la igualdad}}$$

Para resolver una ecuación se debe seguir los siguientes pasos:

1- Separar en términos
2- Operar en cada miembro (siempre que sea posible)
3- Agrupar en el mismo miembro todos los términos semejantes.
4- Operar en cada miembro.
5- Obtener el valor de la incógnita.
6- Verificar que el resultado obtenido haga cierta la igualdad.

Ejemplos 1

$$-6x+2=20+3x$$
$$-6x-3x=20-2$$
$$-9x=18$$
$$x=18:(-9)$$
$$x=-2$$

Verificación

$$-6x+2=20+3x \quad si\ x=-2$$
$$-6.(-2)+2=20+3.(-2)$$
$$12+2=20-6$$
$$14=14$$

Ejemplo 2

$$3.(4+x)=5\,.(x+4)+1-3x$$
$$12+3x=5x+20+1-3x$$
$$3x-5x+3x=20+1-12$$
$$x=9$$

Verificación:

$$3.(4+x)=5\,.(x+4)+1-3x$$
$$si\ x=9$$
$$12+3.9=5.9+20+1-3.9$$
$$39=39$$

Ejemplo 3

$$\frac{3x-1}{3}+\frac{3}{4}=\frac{x+1}{3}$$
$$\frac{3x}{3}-\frac{1}{3}+\frac{3}{4}=\frac{x}{3}+\frac{1}{3}$$
$$1x-\frac{1}{3}+\frac{3}{4}=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$$
$$1x-\frac{1}{3}x=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}$$
$$\frac{2}{3}x=-\frac{1}{12}$$
$$x=-\frac{1}{12}:\frac{2}{3}$$
$$x=-\frac{1}{8}$$

Cálculo auxiliar

$$1-\frac{1}{3}=\frac{3-1}{3}=\frac{2}{3}$$
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}=\frac{4+4-9}{12}=-\frac{1}{12}$$
$$-\frac{1}{12}:\frac{2}{3}=-\frac{1}{8}$$

Lenguaje Coloquial- Lenguaje Simbólico

El lenguaje simbólico nos permite escribir con símbolos matemáticos las expresiones coloquiales, para luego resolver los problemas planteados.

Lenguaje coloquial	**Lenguaje simbólico**
El doble de un número	2x
El triple de un número	3x
El consecutivo de un número	X+1
El cuadrado de un número	x^2
La mitad de un número	$x:2=\frac{x}{2}=\frac{1}{2}x$

Para resolver un problema es necesario traducir el enunciado al lenguaje simbólico, plantear la ecuación correspondiente, resolverla y hallar la solución.

Ejemplo:

“La tercera parte de un poste se pinta de rojo, la cuarta parte de verde y quedan 5 metros sin pintar. ¿Cuál es la altura del poste?

$traduccion\ al\ lenguaje\ simbolico$

$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x+5=x$

Resolución de la ecuación

$$\frac{7}{12}x + 5 = x$$
$$\frac{7}{12}x - x = -5$$
$$-\frac{5}{12}x = -5$$
$$x = -5 : \left(-\frac{5}{12}\right)$$
$$x = 12$$

Respuesta: el poste mide 12 metros

ACTIVIDADES

1) Resuelve las siguientes ecuaciones:

   a. $6x + 30 - 5x = 25$
   b. $3x + 2x = 8x - 15$
   c. $-8x - 10 + 2x = 5x - 3x + 6$
   d. $5.(x - 3) = 4.(x + 4)$
   e. $3.(3 - x) + 9 = 2.(x - 4) + 6$
   f. $7x - 4.(2x - 1) + 7 = -2.(1 - 2x) + 3$
   g. $\frac{x-1}{2} + 1 = \frac{1}{5}x$
   h. $\frac{1}{3}x - 1 = 2.(\frac{1}{3}x + \frac{1}{5})$

2) Resuelve las siguientes situaciones problemáticas
   a. Un ciclista recorre un trayecto en tres etapas: en la 1°, la tercera parte del total; en la 2°, la cuarta parte del total y en la 3°, 60 km. ¿Cuál es la longitud del trayecto?

b. En una clase, Andrés, Bruno y Carmen se han presentado a las elecciones para delegado. Bruno ha obtenido la tercera parte de los votos de Andrés, más tres votos. Y Carmen, la mitad de los votos de Bruno, más un voto. Si en total se han emitido 28 votos. ¿cuántos votos ha conseguido cada uno?

c. Una señora gastó \$300 en la farmacia y luego la mitad de lo que le quedaba. Si todavía le quedan \$850 ¿Cuánto dinero tenía antes de entrar en la farmacia?

d. En una terminal de ómnibus suben los $^{3}/_{5}$ del pasaje de un micro, en la primera parada $^{1}/_{3}$ del resto y en la última parada el micro se completa. Si la capacidad del micro es de 45 pasajeros ¿Cuántas personas subieron en cada lugar?

SISTEMAS DE DOS ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS

Lee, interpreta y resuelve el siguiente enunciado:

"Para no ser menos, une vendedora de frutas, que tenía su negocio en la zona en el que el vendedor de pollos y gallinas ofrecía su mercancía, colocó al frente de su local el siguiente cartel:

HOY SE LIQUIDAN
PERAS Y DURAZNOS

6kg. De peras cuestan lo mismo que 5 kg. De duraznos. Y 5 kg. De duraznos más 2 kg. De peras por sólo \$120

¿A cuánto vendía el kilo de cada fruta?"

Un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas está formado por dos ecuaciones de primer grado que tienen las mismas incógnitas.

$$\begin{cases} \boldsymbol{ax + by = c} \\ \boldsymbol{mx + ny = p} \end{cases}$$

Los números a, b, m, n se llaman coeficientes de las incógnitas.

Los números c, p se llaman términos independientes.

Las incógnitas del sistema son x e y.

Para resolver un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas existen diversos métodos. Trabajaremos con algunos de ellos:

Método de Sustitución

$$\begin{cases} \mathbf{3x + y = -3} \\ \mathbf{x + 2y = 4} \end{cases}$$

Se despeja una de las incógnitas en una de las ecuaciones

- $\boldsymbol{x + 2y = 4}$

  $x = 4 - 2y$ **(1)**

- $\boldsymbol{3x + y = -3}$ *Se reemplaza* **(1)** *en la otra ecuación y se resuelve*

$3.(4 - 2y) + y =$ -3

$12 - 6y + y = -3$

$-6y + y = -3 - 12$

$-5y = -15$

$y = \dfrac{-15}{-5}$

$\boldsymbol{y = 3}$

Se reemplaza este valor en la ecuación **(1)**

$x = 4 - 2y$

$x = 4 - 2.3$

$x = 4 - 6$

$\boldsymbol{x = -2}$

Método de Igualación

$$\begin{cases} \mathbf{x - y = 5} \\ \mathbf{3x + 2y = 5} \end{cases}$$

Se despeja la misma incógnita de ambas ecuaciones

- $\boldsymbol{x - y = 5}$

  $x = 5 + y$ **(1)**

- $\boldsymbol{3x + 2y = 5}$

  $3x = 5 - 2y$

  $x = \frac{5-2y}{3}$ **(2)**

Se igualan las ecuaciones **(1)** *y* **(2)** *y se resuelve la ecuación resultante*

$5 + y = \frac{5 - 2y}{3}$

$3.(5 + y) = 5 - 2y$

$15 + 3y = 5 - 2y$

$3y + 2y = 5 - 15$

$5y = -10$

$y = \frac{-10}{5}$

$\boldsymbol{y = -2}$

Se reemplaza el valor de **y** *en* **(1)** *o en* **(2)**

$\boldsymbol{x = 5 + y}$ **(1)**

$x = 5 - 2$

$\boldsymbol{x = 3}$

Método de Suma o Resta

$\begin{cases} \boldsymbol{3x - y = 5} \\ \boldsymbol{x + y = 7} \end{cases}$

$\begin{cases} 3\mathrm{x} - \mathrm{y} = 5 \\ \mathrm{x} + \mathrm{y} = 7 \end{cases}$ *Se multiplica por 3 la segunda ecuación, con la idea de que los coeficientes de la incógnita x sean iguales*

$\begin{cases} 3\mathrm{x} - \mathrm{y} = 5 \\ 3\mathrm{x} + 3\mathrm{y} = 21 \end{cases}$ *Se resta miembro a miembro*

$-4y = -16$

$y = \frac{-16}{-4}$

$\boldsymbol{y = 4}$

$\begin{cases} 3\mathrm{x} - \mathrm{y} = 5 \\ \mathrm{x} + \mathrm{y} = 7 \end{cases}$ *Se suma miembro a miembro*

$4x = 12$

$x = \frac{12}{4}$

$\boldsymbol{y = 3}$

Clasificación de los sistemas

Los sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas pueden tener una única solución, infinitas soluciones o ninguna solución.
Según sus soluciones, los sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas pueden clasificarse en:

Clasificación de los sistemas según sus soluciones

- **Sistema Compatible** (tienen solución)
  - **Determinado** (solución única)
  - **Indeterminado** (infinitas soluciones)
- **Sistema Incompatible** (no tienen solución)

ACTIVIDADES

1) Resuelva analíticamente cada uno de los siguientes sistemas, aplicando el aplicando el método más conveniente en cada caso. Indica el método que aplicaste.

a. $\begin{cases} 2x + y = 12 \\ x - 10y = -15 \end{cases}$

b. $\begin{cases} -3x + y = -4 \\ 3y + 12 = 9x \end{cases}$

c. $\begin{cases} -x + 2y = 12 \\ 4y - 2x = -12 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x + y = -1 \\ -2x + 1 = 5 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 3x + 21 = 13 \end{cases}$

2) Lee, interpreta y resuelve las siguientes situaciones problemáticas:

a. La suma de 2 números es 13 y su diferencia es 5 ¿Cuáles son los números?
b. El triple de un número es igual a la cuarta parte de otro y la suma de ambos es 13 ¿De qué números se trata?
c. El perímetro de un rectángulo es 140 cm y la base es 20 cm más larga que la altura ¿Cuál es la medida del rectángulo?
d. Un padre, para estimular a su hijo a que estudie Matemática, le propone el siguiente juego: por cada ejercicio bien resuelto el padre le entrega $15 y por cada uno que este mal, el hijo le dará al padre $10. Al final del ejercicio 28, el hijo lleva recaudado $195 ¿Cuántos ejercicios ha resuelto bien y cuántos mal?
e. Hay 112 pelotas de golf distribuidas en dos cajas, si se sacan 26 pelotas de una caja y se las coloca en la otra, quedan las dos con igual cantidad de pelotas ¿Cuántas pelotas había inicialmente en cada caja?
f. El dinero que tiene Marta es el doble del que tiene Juan. Entre Marta y Juan tienen juntos $750 ¿Cuánto tiene cada uno?
g. Hace 5 años la edad de mi padre era el triple de la de mi hermano y dentro de 5 años solo será el doble ¿Cuáles son las edades de mi padre y la de mi hermano?
h. Una compañía de aviación tiene una flota de 55 aviones, de los cuales hay 20 bimotores. Los restantes tienen tres o cuatro motores. Si en toda la flota hay 170 motores ¿Cuántos aviones de 3 motores y cuántos de 4 motores hay?
i. Melisa tiene 3 años más de la mitad de los que va a tener Belén el año que viene. Hoy por hoy Belén le lleva a Melisa 6 años ¿Cuántos años tiene cada una?
j. Ariel y María tienen entre los dos $2000. La mitad de lo que tiene Ariel más las dos quintas partes de los que tiene María es igual a lo que tendría Ariel si hubiera perdido $280 ¿Cuánta plata tiene cada uno por separado?

- **k.** En una bicicletería hay bicicletas y triciclos, que en total suman 73. Si se cuentan 188 ruedas, ¿cuántas bicicletas y cuántos triciclos hay?
- **l.** En un estacionamiento de un supermercado hay 145 autos. Algunos tienen dos puertas y otros, cuatro. Si en total hay 400 puestas, ¿cuántos autos de cada tipo hay?
- **m.** Manuel tiene 6 años más que su hermana y sus edades suman 38. ¿Qué edad tiene cada hermano?
- **n.** En una granja se crían gallinas y conejos. Si se cuentan las cabezas, son 50, si se cuentan las patas, son 134. ¿Cuántos animales hay de cada clase?

EXPRESIONES ALGEBRAICAS. EL LENGUAJE ALGEBRAICO

El Álgebra es la rama de la Matemática que se basa en el empleo de números y letras para representar relaciones aritméticas.

EXPRESIÓN ALGEBRAICA

Una ***expresión algebraica*** es la combinación de números y letras relacionados mediante operaciones aritméticas para expresar una situación cualquiera o para generalizar propiedades matemáticas.

> ***Recuerda que...***
> Las expresiones algebraicas, o lenguaje algebraico, se utilizan para expresar una situación cualquiera o para generalizar propiedades matemáticas.

En la siguiente tabla se recogen algunos ejemplos de traducción de expresiones en el lenguaje verbal al algebraico:

Si mi edad es x	El doble de mi edad es	$2x$
	La edad que tendré dentro de 5 años será	$x + 5$
Si el número de mi casa es y	Los números de las casas que están a la derecha y la izquierda de la mía son	$y + 2$ $y - 2$
Si tengo z docenas de huevos	La mitad del número de docenas de huevos que tengo será	$z/2$
	El número de huevos que tengo será	$12z$
Si mi hermano mayor tiene **x** años y yo tengo **y** años de edad	El cantidad de años que me lleva mi hermano será	$x - y$
Si tengo un cuadrado de lado L	Su área vendrá dada por	L^2

Ejemplo: Expresa algebraicamente el área de un rectángulo de lados a y b.

Solución

Planteamos la situación:

Área = lado x lado

$A = a \times b$

Si a = 6 cm y b = 4 cm, el área es 6 × 4 = 24 cm^2.

Observa que hemos generalizado la expresión del cálculo del área de unrectángulo mediante letras. Cada letra representa un lado.

VALOR NUMÉRICO DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA

Valor numérico de una expresión algebraica es el resultado que se obtiene cuando se sustituyen las letras de la expresión por números.

Es lo que hizo en el ejemplo del área del rectángulo, primero se asignó valores a las letras (lados del rectángulo) y finalmente se realizó el producto entre ellas para calcular el valor del área.

Ejemplos:

1. Si x = 2, el valor numérico de $3x^2 - 2x$ es:

   $3(2)^2 - 2(2) = 12 - 4 = 8$

2. Si el lado (L) de un cuadrado es 3 cm, su área será:

   $A = L \times L = 3 \times 3 = 9cm^2$

3. Si x = – 2, el valor numérico de $2x^2$ es: $2(-2)^2 = 2 \,.\, 4 = 8$

CONCEPTOS BÁSICOS

Término	Es cada sumando, o cada parte, en una expresión algebraica, separada por + o −. **Nota**. Expresiones algebraicas que constan de un solo término se llaman monomios, con dos términos se llaman binomios, etc.
Coeficiente	Cada término consta de: un factor numérico y un factor literal. El factor numérico de un término se denomina coeficiente numérico o simplemente coeficiente.
Términos semejantes	Son los términos que tienen el mismo factor literal (se diferencian sólo en su coeficiente numérico).

Ejemplo: sea la expresión $5xy^2 - 3xy + 2xy^2 - 7$

$\Rightarrow$ el coeficiente numérico del término $5xy^2$ es 5

los términos $5xy^2$ y $2xy^2$ son términos semejantes. (¿Por qué?)

POLINOMIOS

DEFINICIÓN

Es una expresión algebraica formada por sumas o restas demonomios no semejantes llamados términos.

Un polinomio en la variable x es una expresión de la forma:

$$P(x) = a_n . x^n + a_{n-1} . x^{n-1} + \ldots + a_1 . x + a_0$$

Donde

$n \in Z$, $n \geq 0$ se llama **grado del polinomio** (es el mayor de los grados de los monomios que lo forman) y se escribe $n = gr\, P(x)$

$a_i \in R$ se denominan **coeficientes** del polinomio

$a_n \neq 0$ se denomina coeficiente principal y a_0 se denomina término independiente

- ✓ Los términos del polinomio están ordenados en potencias decrecientes.
- ✓ El polinomio es completo cuando existen todos los términos.

TIPOS DE POLINOMIOS

Monomios: son los polinomios que tienen un solo término. Ejemplo: $P(x) = 3x$

Binomios: son los polinomios que tienen 2 términos. Ejemplo: $P(x) = 2x^2 – 5x$

Trinomios: son los que tienen 3 términos. Ejemplo: $P(x) = x^3 – 3x^2 + 1$

Constantes: son los que tienen un solo término de grado cero, es de la forma $P(x) = a_0$. Ejemplo: $P(x) = 8$

Nulo: es el polinomio de la forma $P(x) = 0$.

Ejemplo: sea el polinomio $P(x) = 2x^3 + 4x – 5$

- Los valores 2, 4 y -5; son los ***coeficientes del polinomio.***
- Los exponentes de las x, en este caso, son los grados de los términos, entonces para P(x) los grados son 3, 1 y 0 respectivamente.

  El grado del polinomio, es el grado del término de mayor grado, en este caso es 3.
- El polinomio es ***ordenado***, pero ***incompleto***, ya que falta el término de grado 2.

FORMAS POLINÓMICA SEGÚN EL GRADO

1. Forma general de un polinomio de 1er Grado

   $P(x) = ax + b \qquad a \neq 0$
2. Forma general de un polinomio de 2do Grado

   $P(x) = ax^2 + bx + c \qquad a \neq 0$
3. Forma general de un polinomio de 3er Grado

   $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad a \neq 0$

VALOR NUMÉRICO DE P(x)

Es el resultado que se obtiene cuando se sustituyen las letrasde la expresión por números. Recuerda que en nuestro caso solo tendremos un tipo de letra porque trabajamos con una sola variable.

Ejemplo: calcula el valor que toma $P(x) = x^4 - 2x^3 + 5x - 1$ cuando $x = 1$.

Solución

$$\begin{aligned} P(1) &= (1)^4 - 2(1)^3 + 5(1) - 1 \\ &= 1 - 2.1 + 5.1 - 1 \\ &= 1 - 2 + 5 - 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

OPERACIONES ENTRE POLINOMIOS

- **SUMA**

Ejemplo: sumar $P(x) = 3x^2 + 2x + 1$ y $Q(x) = 4x + 3$

Solución

Se puede proceder de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (3x^2 + 2x + 1) + (4x + 3) &= 3x^2 + (2x + 4x) + (1 + 3) \\ &= 3x^2 + (2 + 4)x + (1 + 3) \\ &= 3x^2 + 6x + 4 \end{aligned}$$

SUMA DE POLINOMIOS

Al sumar dos polinomios en x, obtenemos un polinomio en el cual el coeficiente de cada potencia de x es la suma de los coeficientes de términos semejantes.

- **RESTA O SUSTRACCIÓN**

Ejemplo: Dados $P(x) = 3x^8 + x^5 - 4x + 2$ y

$Q(x) = 2x^8 - 2x^5 + x^3 - 2x + 4$. Restar $P(x) - Q(x)$.

Solución

Para realizar la resta, definimos el inverso aditivo de $Q(x)$, como:

$$-Q(x) = -2x^8 + 2x^5 - x^3 + 2x - 4$$

Entonces la diferencia entre $P(x)$ y $Q(x)$ nos quedaría:

$$\begin{aligned} P(x) + (-Q(x)) &= (3x^8 + x^5 - 4x + 2) + (-2x^8 + 2x^5 - x^3 + 2x - 4) \\ &= (3x^8 - 2x^8) + (x^5 + 2x^5) - x^3 + (-4x + 2x) + (2 - 4) \\ &= x^8 + 3x^5 - x^3 - 2x - 2 \end{aligned}$$

RESTA DE POLINOMIOS

Una vez que se determina el polinomio inverso aditivo (también llamado polinomio opuesto), la resta se efectúa como la suma de polinomios.

- **PRODUCTO O MULTIPLICACIÓN**

Ejemplo: efectúa el producto entre $P(x) = 3x^2 + 2x - 5$ y

$Q(x) = 2x^3 - 6x + 5$

Solución

$P(x) \, . \, Q(x) = (3x^2 + 2x - 5) \, . \, (2x^3 - 6x + 5)$

$= 6x^5 - 18x^3 + 15x^2 + 4x^4 - 12x^2 + 10x - 10x^3 + 30x - 25$

$= 6x^5 + 4x^4 - 28x^3 + 3x^2 + 40x - 25$

PRODUCTO DE POLINOMIOS

Es el polinomio que resulta de aplicar la propiedad distributiva (del producto respecto de la suma) y sumar.

- **COCIENTE O DIVISIÓN**

Ejemplo: divide $P(x) = 3x^5 + 2x^4 - 5x^2 + 2$ en $Q(x) = 1 + x^2 - 2x$

Solución

Como el polinomio dividendo P(x) es incompleto, entonces primero lo completamos; $\mathbf{P(x) = 3x^5 + 2x^4 + 0x^3 - 5x^2 + 0x + 2}$

⇒ Luego, ordenamos el divisor Q (x) en potencias decrecientes, resultando: $\mathbf{Q(x) = x^2 - 2x + 1}$

Ahora, efectuamos la división P(x) en Q (x)

$$
\begin{array}{l|l}
3x^5 + 2x^4 + 0x^3 - 5x^2 + 0x + 2 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{-3x^5 + 6x^4 - 3x^3} & 3x^3 + 8x^2 + 13x + 13 \\
\quad 8x^4 - 3x^3 - 5x^2 & \\
\quad \underline{-8x^4 + 16x^3 - 8x^2} & \\
\qquad 13x^3 - 13x^2 + 0x & \\
\qquad \underline{-13x^3 + 26x^2 - 13x} & \\
\qquad\quad 13x^2 - 13x + 2 & \\
\qquad\quad \underline{-13x^2 + 26x - 13} & \\
\qquad\qquad 13x - 11 &
\end{array}
$$

Siendo: $C(x) = 3x^3 + 8x^2 + 13x + 13$ y $R(x) = 13x - 11$

Recuerda que debe cumplirse que: $P(x) = Q(x).C(x) + R(x)$

DIVISION DE POLINOMIOS

Por analogía con la división entera de números, la división de polinomios se define así:

Dados dos polinomios P(x) y Q (x), donde el grado de P(x) es mayor que el grado de Q (x), se trata de determinar otros dos polinomios C (x) y R(x) tales que:

$$\mathbf{P(x) = Q(x).C(x) + R(x)}$$

con la condición de que $Q(x) \neq 0$.

Hagamos entonces:

$Q(x).C(x) = (x^2 - 2x + 1).(3x^3 + 8x^2 + 13x + 13)$

$= 3x^5 + 8x^4 + 13x^3 + 13x^2 - 6x^4 - 16x^3 - 26x^2 - 26x + 3x^3 + 8x^2 + 13x + 13$

$= 3x^5 + 2x^4 - 5x^2 - 13x + 13$

A este resultado le sumamos R(x):

$Q(x).C(x) + R(x) = (3x^5 + 2x^4 - 5x^2 - 13x + 13) + (13x - 11)$

$= 3x^5 + 2x^4 - 5x^2 + 2$

IGUALDAD ENTRE POLINOMIOS

Dos polinomios son iguales cuando tienen el mismo grado y los coeficientes de los términos semejantes son iguales.

Por lo tanto se cumple que: $\mathbf{P(x) = (x^2 - 2x + 1).(3x^3 + 8x^2 + 13x + 13) + (13x - 11)}$

Cuando el resto del cociente entre dos números da cero decimos que el numerador es divisible por el denominador, extendiendo esta definición para polinomios decimos que:

El cociente entre dos polinomios es ***EXACTO*** si el ***resto es cero***.

O sea P(x) es divisible por Q(x) solo si P(x) = C(x). Q(x)

REGLA DE RUFFINI

Cuando queremos dividir un polinomio por un binomio de la forma $(x - a)$ donde a es una constante, podemos usar la regla de Ruffini.

Su algoritmo es el siguiente:

Tomemos por ejemplo un $P(x) = bx^3 + cx^2 + dx + e$, al que queremos dividirlo por $(x - a)$. Aplicamos la regla de Ruffini y hacemos:

1) Completamos y ordenamos en potencias decrecientes al P(x) (si no lo estuviera)
2) Armamos una estructura con solo los coeficientes del P(x). (línea 1)
3) En línea 2, colocamos "a".
4) En línea 3, inicialmente colocamos "b".
5) Multiplicamos "b" por "a" y colocamos en línea 2, en la columna de "c".
6) Sumamos "c" con "b.a" para obtener U (línea 3).
7) Multiplicamos "U" por "a" y colocamos en línea 2, en la columna de "d".
8) Sumamos "d" con "U.a" para obtener V (línea 3).

9) Multiplicamos "V" por "a" y colocamos en línea 2, en la columna de "e".

10) Finalmente, sumamos "e" con "V.a" para obtener W (línea 3).

11) Los valores b, U, V son los coeficientes del polinomio C (x) y W es el resto de la división.

$P(x) = bx^3 + cx^2 + dx + e \qquad y \qquad Q(x) = x - a$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & b & c & d & e \\
a & & b.a & U.a & V.a \\
\hline
 & b & U & V & W
\end{array}
\begin{array}{l}
\rightarrow \text{ línea 1} \\
\rightarrow \text{ línea 2} \\
\rightarrow \text{ línea 3}
\end{array}$$

$U = c + b.a \qquad V = d + U.a \qquad W = e + V.a$

$C(x) = bx^2 + Ux + V \quad \rightarrow \quad$ C (x) tiene un grado menor que P(x)

$R(x) = W$

Ejemplo: Dividir $x^3 - 8x + 5$ por $x - 3$

Entonces, el dividendo ordenado y completo es: $P(x) = x^3 + 0x^2 - 8x + 5$

El divisor: $Q(x) = x - 3$ donde $a = 3$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 0 & -8 & 5 \\
3 & & 3 & 9 & 3 \\
\hline
 & 1 & 3 & 1 & 8
\end{array}$$

Los valores obtenidos con este procedimiento son los coeficientes de los términos del polinomio cociente (que es un grado menor que P(x)):

$C(x) = x^2 + 3x + 1$

y el resto será: $R(x) = 8$

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Factorear un polinomio es transformarlo en un producto de expresiones algebraicas.

- **Factor común.**
  Si en todos los términos de un polinomio figura un factor común, dicho polinomio es igual al producto de ese factor por el polinomio que resulta al dividir cada término por ese factor.

  Ejemplo: factorizar $P(x) = 6x^2y^2 - 3x^2y + 9xy$

  Primero sacamos como factor común de cada término a **3xy**, entonces,

  $P(x) = 6x^2y^2 - 3x^2y + 9xy = \mathbf{3xy.\ (2xy - x + 3)}$

- **Factor común por grupos.**
  Algunas veces, aunque los términos de un polinomio no tengan un factor común monomial, es posible agrupar términos de tal manera que cada grupo tenga un factor común.

  Ejemplo: factorizar $P(x) = 3x - 2ab + nx - 2bx + an + 3a$

  Agrupamos así: $P(x) = (3x + nx - 2bx) + (- 2ab + an + 3a)$

  $P(x) = x\ (3 + n - 2b) + a\ (- 2b + n + 3)$

  $\mathbf{P(x) = (x + a)\ (3 + n - 2b)}$

- **Trinomio cuadrado perfecto.**
  Se llama trinomio cuadrado perfecto al trinomio tal que dos de sus términos son cuadrados de algún valor y el otro término es el doble producto de las bases de esos cuadrados.

  Ejemplo: $P(x) = 25\ x^2 + 10xy^2 + y^4$ es un trinomio cuadrado perfecto ya que:

  $25\ x^2 = (5x)^2$

  $y^4 = (y^2)^2$

  $10xy^2 = 2\ .\ (5.x).(y^2)$

  Entonces el factoreo del trinomio dado es: $\mathbf{P(x) = 25x^2 + 10xy^2 + y^4 = (5x + y^2)^2}$

- **Cuatrinomio cubo perfecto.**

  Todo cuatrinomio de la forma: $\mathbf{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$

Ejemplo: $P(x) = x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$ es un cuatrinomio cubo perfecto porque:

$x^3 = (x)^3$ $6x^2y = 3(x)^2 2y$

$8y^3 = (2y)^3$ $12xy^3 = 3(x)(2y)^2$

El polinomio queda factoreado de la siguiente manera:

$$P(x) = x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3 = \mathbf{(x + 2y)^3}$$

- **Suma de potencias de igual grado.**

En general, la suma de dos potencias de igual grado de exponente impar, es igual al producto de la suma de las bases por el cociente que resulta de dividir la primera suma por la segunda.

Ejemplo: $(x^3 + a^3) = (x + a).(x^2 - ax + a^2)$

- **Diferencia de potencias de igual grado.**

a) Cuando el exponente es par

Sea por ejemplo, factorear la siguiente expresion: $\mathbf{x^6 - a^6}$

Puede factorearse de la siguientes formas:

i) Haciendo figurar la suma de las bases:

$$\left(x^6 - y^6\right) : (x + y) = x^5 - yx^4 + y^2x^3 - y^3x^2 + y^4x^3 - y^5$$
$$\left(x^6 - y^6\right) = (x + y)(x^5 - yx^4 + y^2x^3 - y^3x^2 + y^4x^3 - y^5)$$

ii) Haciendo figurar la diferencia de las bases:

$$\left(x^6 - y^6\right) : (x - y) = x^5 + yx^4 + y^2x^3 + y^3x^2 + y^4x^3 + y^5$$
$$\left(x^6 - y^6\right) = (x - y)(x^5 + yx^4 + y^2x^3 + y^3x^2 + y^4x^3 + y^5)$$

iii) Por último

$$x^6 - y^6 = (x^3 - y^3)(x^3 + y^3)$$

b) Cuando el exponente es impar

En general, la diferencia de dos potencias de igual grado de exponente impar, es igual al producto de la diferencia de las bases por el cociente que resulta de dividir la primera diferencia por la segunda.

Ejemplo:

Sea por ejemplo, factorear la siguiente expresión: $\mathbf{x^5 - a^5}$

$x^5 - a^5$ *es divisible por* $x - a$ *y el cociente exacto es:*

$(x^5 - a^5):(x - a) = x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4$

Por consiguiente:

$$(x^5 - a^5) = (x - a)(x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4)$$

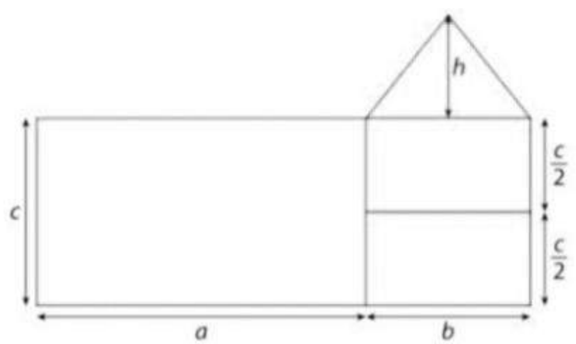
- **Diferencia de cuadrados**

Toda diferencia de cuadrados es igual al producto de la suma por la diferencia de las bases de dichos cuadrados.

Ejemplo: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

ACTIVIDADES

1) Expresa algebraicamente el área de la figura.



2) Completa la siguiente tabla indicando el valor numérico de cada expresión.

	$x=-1$	$x=0$	$x=2$	$x=\frac{1}{2}$
$x^2 - x$				
$6x - \frac{x^2}{2}$				
$x(10 - 5x)$				

3) ¿Cuál de las siguientes expresiones son un polinomio?

a. $\dfrac{1}{2a+b}$ c. $\dfrac{1}{3}x+1-\dfrac{2}{5}x^2$

b. $\dfrac{2+x}{2}$ d. 2^x+1

4) Describe los siguientes polinomios, indicando el número de términos que lo componen y cuáles son los coeficientes y partes literales de cada uno.

a) $A(x)=32x^3+12x^2$ b) $B(x)=2x+5x-3x+4$

c) $C(x)=3x-4x^3+6x^3-40x^5+10$ d) $D(x)=6x+3x^2-5x-8$

5) Sean los siguientes polinomios:

$P_1(x)=4x^3-2x^2+3x-4$ $P_2(x)=-3x^3+4x^2-2x+1$ $P_3(x)=x^3-x^2+1$

Calcula:

a) $P_1+P_2-P_3$ b) $P_2\,.\,P_1+P_3$ c) $(P_3+P_2):P_1$

- *En todos los casos, indica cual es el grado del polinomio obtenido.*

6) Resuelve las siguientes divisiones aplicando Regla de Ruffini.

a. $\left(3x^4-7x^3+\dfrac{1}{5}x^2-12x+4\right):(x-3)$ c. $(5x^4-3x+2x^2+6):(x-2)$

b. $\left(3x^3-12x^2+4x+\dfrac{1}{2}\right):(x+3)$ d. $(x^3+3x^2-8x+1):(x+1)$

7) Califica con verdadero o falso según corresponda. Justifica.

a) $x^2-2x+1=(x+1)^2$ **b)** $x^2+8x+16=(x+4)^2$

c) $x^2+2x-1=(x-1)^2$ **d)** $1+3x^2-3x-x^3=(1-x)^3$

e) $x^3-27x^2+9x-27=(x-3)^3$ **f)** $27+x^3+9x^2+27x=(x+3)^3$

8) Factorea los siguientes polinomios.

a) $P(x)=x^3+2x^2-4x-8$

b) $P(x)=x^4-81$

c) $P(x)=x^5-x^3$

d) $P(x)=x^5-x^4-5x^3+5x^2+6x-6$

e) $P(x)=\left(x^2-9\right)^2-\left(x+3\right)^2$

f) $P(x)=x^4+5x^2+4$

g) $P(x)=x^3-3x-2$

h) $P(x)=x^7+x^4-16x^3-16$

i) $P(x)=x^5-3x^4+3x^3-x^2$

j) $P(x)=2x^5+x^4-2x-1$

k) $P(x)=16+40x^2+25x^4$

l) $P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$

UNIDAD 1 b.

LENGUAJE DE LA MATEMÁTICA

El hombre utiliza palabras, sonidos, símbolos, imágenes y gestos, entre otros, para dar a conocer sus ideas. Por su parte, la matemática ayuda a entender el mundo y sus relaciones, pero expresándolo en un **lenguaje simbólico complejo**.

Para aprender Matemática hace falta conocer su *idioma*, sus palabras clave, los objetos que se utilizan, las herramientas necesarias para manejar esos objetos. Sin embargo, se necesita cierto entrenamiento para traducir del lenguaje que se utiliza habitualmente al sistema de escritura matemática.

El idioma que utiliza es formal y abstracto, pues mezcla palabras, números, símbolos, figuras y conceptos que tienen un “significado matemático”, que no siempre coincide con el significado en el lenguaje normal, castellano o de cualquier otro idioma.

A su vez, la Matemática es una ciencia lógica y deductiva. La deducción lógica exige cumplir unas “reglas” muy precisas: “si no se cumple, no funciona”. Parte de principios (axiomas); de unas definiciones y conceptos; de unos objetos (números, símbolos, operadores,…); de unas “reglas de juego” (propiedades). Las “reglas de juego” hay que aprenderlas, comprenderlas y utilizarlas. Los resultados a los que se lleguen deben ser demostrados; no basta con una simple comprobación.

El lenguaje matemático comprende: el lenguaje coloquial, el algebraico o simbólico y el gráfico.

El **lenguaje coloquial**, formado por las palabras que se utilizan para conversar. Por ejemplo: “el triple de un número es igual a diez”, “Juan tiene dos años más que Patricia”, “el costo de vida ha aumentado un 2%”.

El **lenguaje simbólico o algebraico**, formado por los símbolos específicos de la Matemática. Las expresiones de los ejemplos presentados en el párrafo anterior serían respectivamente: ”$3n=10$”, “$J=P+2$” y “$C=c+0{,}02c$”.

El **lenguaje gráfico**, utilizado para brindar mucha información en poco espacio. Por ejemplo: los gráficos circulares, los gráficos de barras o las representaciones en el plano cartesiano.

De esta manera, la Matemática constituye un lenguaje exacto, que requiere palabras sencillas, aunque bien definidas, y la estricta observación de sus “reglas”. Una frase en Matemática debe transmitir un mensaje exacto a quien lo lea. Frases cuyo significado no es claro y aquellas que admiten más de una interpretación no pueden ser toleradas en este lenguaje. El escritor de una frase matemática tiene que saber lo que quiere decir y estar seguro de que la frase expresa el mensaje que desea transmitir. Así mismo, un buen lector de frases matemáticas, un traductor de dicho lenguaje será capaz de comprenderla y poder utilizarla para satisfacer las necesidades que requiera.

¿Qué estudia la Matemática?

La Matemática estudia la cantidad (números; álgebra), la extensión (la figura, la forma, los ángulos; la geometría); el cambio, la variación de magnitudes (el límite; análisis matemático); grandes conjuntos de datos (estadística); el azar y su medida (probabilidad). Es decir, que la Matemática es una ciencia formal que, partiendo de axiomas y siguiendo el razonamiento lógico, estudia las propiedades y relaciones entre entidades abstractas como números, figuras geométricas o símbolos matemáticos. Debe destacarse además su método (lógico, deductivo, constructivo, seguro y universal), que hace que pueda aplicarse en prácticamente todas las otras ciencias: como herramienta de cálculo y de visualización, como sistema de organización del conocimiento teórico (proporcionando modelos matemáticos), como garantía de "certeza", entre otras utilidades.

Por este motivo Y entendiendo que esta ciencia utiliza diferentes lenguajes. Abordaremos el estudio de los diferentes conjuntos numéricos.

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

Los números que se utilizan para contar se llaman *números naturales*.

Al conjunto formado por todos los números naturales se lo denota con la letra $\mathbb{N}$. Para contar *un* elemento se utiliza el número 1, para el siguiente el número 2, y así sucesivamente.

A cada número natural le sigue otro número natural que se obtiene agregando 1 al anterior. Así aparece la operación *adición*. Sumar 1 es nombrar al siguiente de un número natural.

Por ejemplo, el siguiente de 5 es 6, y por eso 6 = 5 +1.

Los elementos que se *adicionan* reciben el nombre de *sumandos* o *términos,* y el resultado de la operación recibe el nombre de *suma*.

Suma $\underbrace{a + b}_{\text{sumandos}} = c \longrightarrow$

En símbolos:

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{N} : \exists\, \boldsymbol{c} \in \mathbb{N} \;\; \mathbb{N} \,/\, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} \;\; \textbf{(1)}$$

(se lee para todos los elementos a , b que pertenecen al conjunto de números naturales, existe un elemento c que pertenece al conjunto de números naturales tale que a más b es igual a c)

La operación de *adición* se extiende a todos los números naturales. Así, por ejemplo, como 2= 1+1, entonces 5 + 2 es "el siguiente, del siguiente de 5", es decir 5 + 2 = 7.

Se dice que un número natural ***a*** es menor que otro *b* , si y sólo si existe un número natural ***c*** tal que la suma entre ***a*** y ***c*** es ***b*** . En símbolos:

$$\forall a,b,c \in \mathbb{N} : a<b \Leftrightarrow c \in \mathbb{N} \ / \ b = a + c$$

(Se lee: para todos los elementos o dados los elementos a,b,c, que pertenecen al conjuntos de los números naturales se cumple que a es menor que b si y sólo si existe un elemento c que pertenece al conjunto de los números naturales tal que b es igual a la suma entre a y c)

Por otra parte, un número natural es mayor que otro, si y sólo si el segundo es menor que el primero. En símbolos:

$$\forall a,b \in \mathbb{N} : a > b \Leftrightarrow b < a$$

La suma reiterada de un mismo número se llama ***multiplicación***. Así, sumar 5 veces 8 es multiplicar 5 por 8, y coincidentemente, es lo mismo que sumar 8 veces 5. Esto es: 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 5.8 y además 8+8+8+8+8 = 5+ 5+ 5+ 5+ 5+ 5+ 5+ 5 .

Los elementos que se *multiplican* reciben el nombre de ***factores*** y el resultado de la *multiplicación* se llama ***producto***.

$\underbrace{a . b}_{\text{Factores}} = c \Rightarrow$ Producto

Así, en el conjunto de los números naturales pueden definirse 2 operaciones: **adición** y **multiplicación**.

Estas operaciones son ***cerradas*** en $\mathbb{N}$, es decir la adición y la multiplicación de dos números naturales es otro natural.

$\forall a,b \in \mathbb{N} : a + b \in \mathbb{N}$ $\qquad$ $\forall a, b \in \mathbb{N} : a.b \in \mathbb{N}$

Propiedades de la adición y multiplicación en $\mathbb{N}$.

Las operaciones de adición y multiplicación cumplen con las siguientes propiedades en el conjunto de los números naturales:

***Conmutatividad*:** esta propiedad se refiere a que el orden de los sumandos de una adición o de los factores en una multiplicación no altera el resultado. Por ejemplo, 5 + 6 =11 y 6 + 5 =11, 2.3 = 6 y 3.2 = 6 .

Es decir que:

5 + 6 = 6 + 5 y 2.3 = 3.2.

Asociatividad **:** esta propiedad se refiere a que la forma de agrupar los términos en una adición o en una multiplicación no altera el resultado. Por ejemplo,

2 + (3+ 4) = 2 + 7 = 9 y (2 +3) + 4 = 5 + 4 = 9 ;

2.(3.4) = 2.12 = 24 y (2.3).4 = 6.4 = 24 .

Es decir que:

2 + (3+ 4) = (2 + 3) + 4 y 2.(3.4) = (2.3).4

Propiedad uniforme**:** si se suma o se multiplica en ambos miembros de una igualdad, un número natural, la igualdad se mantiene.

Es decir que

a = b se cumple que a + c = b + c a = b se cumple que a . c = b . c	Ejemplo 6 = 6 se cumple que 6+ 2 = 6 + 2 6 = 6 se cumple que 6. 2 = 6 . 2

Propiedad cancelativa: es la recíproca de la propiedad uniforme.

Elemento neutro para la multiplicación: el producto entre cualquier número natural y el 1 es igual a dicho número natural.

Distributivita de la multiplicación respecto a la adición**:** la multiplicación es distributiva respecto de la adición. Por ejemplo:

(2 +1).3 = 2.3+1.3 y 3. (2 + 1) = 3.2 + 3.1.

Así como la multiplicación por un natural es una suma reiterada de términos iguales, se conviene en representar la multiplicación iterada como una *potencia*:

8.8.8.8 = 8^4.

$$\underbrace{a.\ a.\ a.\ a.\ a.\ a\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ a}_{\text{n veces}} = a^n$$

En este caso, 8 se llama la ***base*** y 4 el ***exponente***. La operación recibe el nombre de ***potenciación*** y el resultado se llama ***potencia***. El exponente indica el número de veces que se multiplica a la base por sí misma. Se puede observar por ejemplo que:

Una **potencia** es una forma abreviada de escribir un producto de factores iguales. La **base** es el factor que se repite, y el **exponente** el número de veces que se repite este factor.

Exponente

$$4^5 = \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}_{\text{5 veces}} = 1024$$

Base

Propiedades del $\mathbb{N}$

Con lo expuesto anteriormente pueden resumirse las siguientes propiedades del $\mathbb{N}$:

1) Es un conjunto “infinito”, y totalmente ordenado por la relación “≤”.
2) Todo número natural tiene siguiente.
3) Este conjunto tiene primer elemento, el **1**.
4) No tiene último elemento
5) Entre dos números naturales existe un número finito de números naturales. Por ello se dice que es **discreto**.

Posteriormente surgió la necesidad de definir un número que represente que no hay elementos que contar y es así como surge el número 0.

Al conjunto formado por todos los números naturales y este nuevo número se lo simbolizó con $\mathbb{N}$_***o*** (se lee: $\mathbb{N}$ sub cero). (también puede encontrarlo como conjunto cardinal)

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{\mathbf{0}\}$$

Este conjunto tiene las mismas propiedades que el conjunto de los números naturales a excepción del primer elemento, que en este conjunto es el 0.
Se definen las mismas operaciones que se definieron en $\mathbb{N}$ y se agregan las siguientes propiedades:

Elemento neutro para la adición*:*

$$\forall\, a \in \mathbb{N}_0 \colon \exists\ \mathbf{0} \in \mathbb{N}_0 \,/\, \boldsymbol{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$$

Elemento absorbente para la multiplicación:

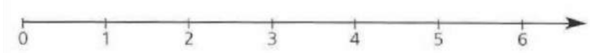
$$\forall\, a \in \mathbb{N}_0 \colon \exists\ \mathbf{0} \in \mathbb{N}_0 \,/\, \boldsymbol{a}\ .\ \mathbf{0} = \mathbf{0}\ .\ \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$$

Potencia con exponente 0: se conviene definir la potencia de un número natural con exponente 0, igual a 1.

$$\forall\, a \in \mathbb{N}_0 \colon \boldsymbol{a}^{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$$

Recta Numérica

Fijada una recta, un punto **o** como origen, un segmento como unidad y un sentido a partir del punto origen (de izquierda a derecha), a todo número natural le corresponde un punto sobre la recta, pero existen puntos de la recta a los que no les corresponden números naturales. Por ello, se dice que el conjunto $\mathbb{N}_0$ **"no cubre"** la recta.



ACTIVIDADES

Ejercicios y problemas

Resuelva justificando con las propiedades que utiliza.

1) En una florería arman ramos pequeños y ramos grandes. Cada ramo pequeño tiene 3 rosas y cada ramo grande tiene 7 rosas. Si usaron 144 rosas y armaron 20 paquetes pequeños, ¿cuántos ramos grandes armaron?

2) En la heladería Ailén compró 3 cucuruchos. Pagó con un billete de $200 y recibió $35 de vuelto. Beto compró 2 vasitos. Pagó con un billete de $100 y recibió $30 de vuelto. Carla compró dos cucuruchos y un vasito. ¿Cuánto pagó Carla en total? Seleccione el planteo que permite hallar la respuesta a este problema y resuélvalo:

- $200 - 35 : 3 \cdot 2 + 100 - 30 : 2 =$
- $(200 - 35 : 3 \cdot 2) + (100 - 30 : 2) =$
- $200 : 3 \cdot 2 - 35 + 100 : 2 - 30 =$
- $(200 - 35) : 3 \cdot 2 + (100 - 30) : 2 =$
- $\{[(200 - 35) : 3] \cdot 2\} + (100 - 30) : 2 =$

3) En una bolsa hay caramelos de 3 gustos: frutilla, limón y naranja. En total hay 478 caramelos. Con los caramelos de frutilla se armaron 16 paquetitos de 6 caramelos y sobraron 2. Con los caramelos de limón se armaron 25 paquetitos de 8 caramelos y no sobró ninguno. Con los caramelos de naranja, ¿cuántos paquetitos de 5 caramelos se pueden armar?

4) Olivia perdió el contacto de una de sus amigas y necesita llamarla con urgencia. Recuerda la característica del número de teléfono y de las otras 7 cifras recuerda que son 0, 5,4, 6, 7, 8 y 9 pero no recuerda en qué orden. ¿Cuál es el número de llamadas que a lo sumo tiene que hacer Olivia para que una de ellas corresponda al número correcto?

5) Coloque los paréntesis, corchetes o llaves necesarios para que la siguiente igualdad sea verdadera:

$$2 + 32 + 9 : 3 : 3 \cdot 5 + 50 = 21$$

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS $\mathbb{Z}$

Se considera el problema de hallar el número que sumado a 5 sea igual a 3. Este problema no tiene solución en el conjunto de los números naturales, ya que si se suma un natural a 5 se obtiene otro natural mayor que 5, y 3 es menor que 5.

La introducción de los números enteros negativos y el cero sirvió para resolver este tipo de problemas. En primer lugar, como ya se estudió, la adición entre cualquier natural y 0, es dicho natural:

3+0= 3,   125+0 =125 .

Así, queda definida la adición entre un número natural y el 0, y la diferencia entre dos números naturales iguales:

3-3 = 0,   125 - 125 = 0

Se establece una “**correspondencia biunívoca”** entre$\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}^+$ (conjunto formado por los enteros positivos) es decir, a cada número natural le corresponde o se “identifica” con un único número entero positivo y viceversa, a cada número entero positivo le corresponde o se “identifica” con un único número natural. O sea

$$\mathbb{N} = \{1 ,\ 2 ,\ 3 ,\ 4 ,\ 5,\ 6,\ 7, \dots \dots \dots \dots \}$$
$$\mathbb{Z} = \{+1, +2, +3, +4. +5, +6, +7 \dots \dots \dots . . \}$$

Además, para cada entero positivo se considera el *opuesto* como el número entero que sumado a él da como resultado 0. Así, por ejemplo, el número que sumado a +1 da como resultado 0 se lo denota -1 y es el opuesto al número entero positivo +1. El opuesto de + 2 es -2, el de +3 es-3 y así sucesivamente.

Todos los opuestos de los números enteros positivos se denominan enteros negativos y al conjunto formado por todos los números enteros negativos se lo denota con $\mathbb{Z}^-$. Así, los enteros negativos, los positivos y el cero dan lugar al conjunto de los Números Enteros.

$$\mathbb{Z}^+ = \{+1, +2, +3, +4, ...\} \quad y \quad \mathbb{Z}^- = \{ . . . , -4, -3, -2, - 1 \}$$

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- \cup \{\mathbf{0}\}$$

Además, así como - 3 es el opuesto de +3, también se dice que +3 es el opuesto de -3, y que el 0 es el opuesto de sí mismo.

En símbolos: $\forall\, \boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}: \exists - \boldsymbol{a} \in \mathbb{Z} / \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = (-\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$

Las operaciones de adición y de multiplicación se extienden a este nuevo conjunto.

La *diferencia* entre dos números enteros se denota con el símbolo "**-**", por ejemplo entre 10 – (-2).

El número 10 en este caso recibe el nombre de <u>minuendo</u>, el -2 se llama <u>sustraendo</u>, la operación es la <u>sustracción</u> y el resultado se lo conoce como <u>diferencia</u>. Observe que la sustracción en $\mathbb{Z}$ es una adición en dicho conjunto. En efecto, la sustracción de dos números enteros se define como la adición entre el minuendo y el opuesto del sustraendo:

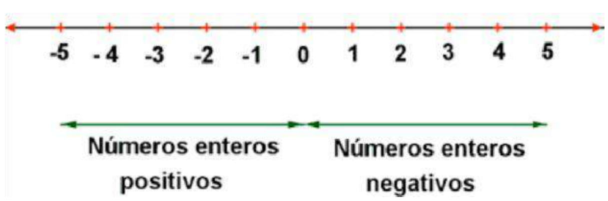
$$1 - 4 = 1 + (-4) = -3; \qquad -7 - 15 = -7 + (-15) = -22$$

En símbolos: $\forall\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}: \exists - \boldsymbol{a} \in \mathbb{Z} \quad \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$

Así como en $\mathbb{N}$ existe un orden natural: 1< 2, 2 < 3, 3 < 4, etc., en $\mathbb{Z}$ también hay un orden compatible con el que se define en $\mathbb{N}$. Los números enteros conforman una sucesión infinita de números, donde cada elemento tiene un *sucesor* que se obtiene sumando +1 al número, y un antecesor, que se obtiene sumándole - 1 . Por ejemplo, -7 es el antecesor de - 6 pues -6 +(- 1) = 7 y - 5 es el sucesor de - 6 pues - 6 +(+1)= -5 . La siguiente es una lista ordenada de algunos enteros:

..., -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, ...

Claramente, existen muchos puntos de la recta que no se corresponden con ningún número entero. La siguiente figura es una representación de algunos números enteros:



Propiedades del $\mathbb{Z}$ **1)** Es un conjunto infinito y totalmente ordenado por la relación "≤". **2)** Todo número entero tiene siguiente y un anterior.

3) Este conjunto no tiene <u>primer elemento</u>, ni tiene <u>último elemento (</u>como consecuencia de 2).

4) Entre dos números enteros existe un conjunto finito de números enteros. Por ello se dice que el conjunto $\mathbb{Z}$ es discreto.

En el conjunto de los números enteros están definidas entonces las operaciones de adición y de multiplicación, y satisfacen las mismas propiedades que se satisfacen en $\mathbb{N}$.

Además, la adición en $\mathbb{Z}$, cumple con la propiedad de existencia de elemento opuesto. En efecto, ya se estudió la existencia del opuesto de todo número entero.

También la potencia de un número con exponente natural se define como la multiplicación reiterada del número tantas veces como lo indique el exponente. Por ejemplo: $(-5)^3 = (-5).(-5).(-5) = -12$.Las potencias con exponente negativo no están definidas en este conjunto.

Para multiplicar dos números enteros, se tiene en cuenta la siguiente propiedad:
Propiedad: *El producto entre dos números enteros del mismo signo es positivo y el producto entre dos números enteros con distinto signo es negativo*.

La División en $\mathbb{Z}$

Definición:

$$Sean,\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z},\ b \neq\ 0,\ se\ dice\ que\ \boldsymbol{a}\ divide\ a\ \boldsymbol{b}\ o\ que\ \boldsymbol{a}\ es\ divisor\ de\ \boldsymbol{b},\ o\ que\ \boldsymbol{b}\ es\ \text{múltiplo}\ de\ \boldsymbol{a},\ si\ y\ solo\ si\ existe\ \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}\ tal\ que\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}.\ \boldsymbol{k}$$

En símbolos

$$\frac{a}{b} \Leftrightarrow \exists k\ \in \mathbb{Z}\ tal\ que\ b = a.k$$

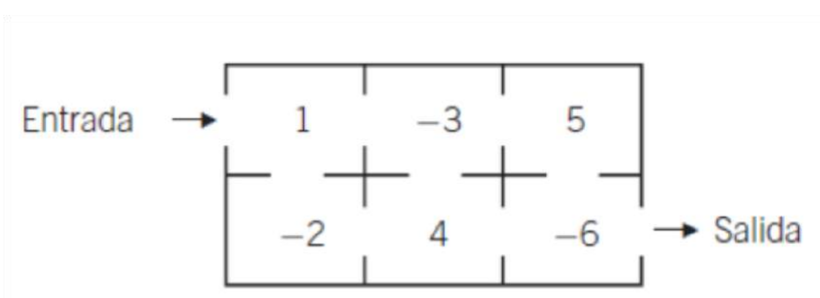
Por ejemplo, 8 es divisible por 4, o bien 4 es divisor de 8, u 8 es múltiplo de 4.

ACTIVIDADES

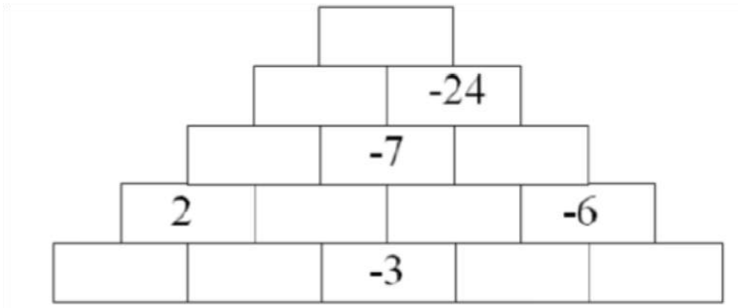
Ejercicios y problemas

Resuelva los siguientes problemas justificando con las propiedades de las operaciones del conjunto de los números enteros utilizadas:

a) ¿Cuál será el camino cuya suma sea la menor para ir desde la entrada a la salida? ¿Cuál será el camino para que la suma sea la mayor?



b) En la siguiente pirámide el número de cada casilla debe ser la suma de los dos números de las casillas sobre las que se apoya. Complétela:



c) Si Pitágoras murió en el año 493 a.C y nació en el año 580 a.C. ¿Cuántos años vivió?

d) Resuelva el siguiente cálculo, justificando con las propiedades de las operaciones definidas en **Z**

$$\frac{(\mathbf{5^6.5^5})^\mathbf{4}}{\mathbf{5^2}} - [-(\mathbf{23} + (-\mathbf{45}))] + \mathbf{1001^0}.(-\mathbf{20}:(-\mathbf{4})) =$$

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES $\mathbb{Q}$

Siempre que se mide algo, longitudes, capacidad, volumen, áreas, tiempo, etc., se utilizan *unidades de medida*. Así es que se mide cuántas veces cabe cierta unidad en aquello que se quiere medir. Pero sea cual fuera esta unidad, no siempre ésta cabe una cantidad entera de veces, y es necesario *fraccionarla.* Es así como surgieron históricamente las fracciones. Siglos más tarde, a estas fracciones se les dio una categoría de *números* ya que sirvieron para resolver problemas numéricos como por ejemplo *“hallar el número que multiplicado por 5 dé como resultado 2”.*

La solución de dicho problema es la fracción $\frac{2}{5}$; y se lee “dos quintos”. Las fracciones se representan como cocientes entre dos números enteros, llamados *numerador y denominador* respectivamente, siendo el *denominador distinto de 0*. Por ejemplo:

$$\frac{7}{3}, \quad \frac{-2}{8}, \quad \frac{0}{-5}, \quad \frac{3}{3}$$

El conjunto formado por todas las fracciones, es decir aquellos números que pueden expresarse como cocientes entre dos números enteros, se denomina el conjunto de los números racionales y se lo denota con la letra $\mathbb{Q}$.

Se puede observar que todo número entero o natural puede escribirse como el cociente entre dicho número y 1. Por ejemplo: a 3 se lo puede escribir como $\frac{3}{1}$, a -5 como $\frac{-5}{1}$, a 0 como $\frac{0}{1}$

Por este motivo, toda fracción con denominador 1 , se comporta algebraicamente como un número entero o natural en cada caso. Es decir, existe una correspondencia biunívoca entre

los números enteros y un subconjunto de $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}_*$, formado por todas las fracciones de denominador
1.

$$\begin{array}{l} \mathbb{Z} = \{\ldots, \ -4, -3, -2, \ \ -1, 0, \ \ +1, +2, +3, \ldots\} \\ \qquad\quad \updownarrow \ \updownarrow \ \ \updownarrow \ \ \updownarrow \updownarrow \ \ \updownarrow \ \ \updownarrow \ \ \updownarrow \\ \mathbb{Q}^* = \{\ldots, \frac{-4}{1}, \frac{-3}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{+1}{1}, \frac{+2}{1}, \frac{+3}{1}, \ldots\} \end{array}$$

Operaciones definidas en $\mathbb{Q}$
La adición de dos fracciones con el mismo denominador es otra fracción con el mismo denominador y cuyo numerador es la suma de los numeradores. Por ejemplo:

$$\frac{2}{3} - \frac{7}{3} = \frac{2-7}{3} = \frac{-5}{3} \qquad y \qquad \frac{2}{3} + \frac{7}{3} = \frac{2+7}{3} = \frac{9}{3}$$

En particular, se tiene que:

$$\frac{2}{3} + \frac{-2}{3} = \frac{0}{3} = 0$$

Por ello se deduce que $\frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$ Observe, además, que se definió a los números racionales como aquellos que pueden expresarse como el cociente de dos números enteros, por ejemplo$\frac{-2}{3}$. También se sabe que el cociente de dos números enteros con distinto signo es negativo. De esta manera, es intuitivo pensar que $\frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$.

En particular, puede verse además que $\frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$, pero por convención se elige el denominador positivo.

Si los denominadores son distintos el problema de sumar se resuelve buscando fracciones con el mismo denominador, equivalentes a las dadas. Por ejemplo, para sumar $\frac{2}{3}\ y\ \frac{1}{2}$ y , pueden utilizarse las $\frac{4}{6}\ y\ \frac{3}{6}$; fracciones

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4+3}{6} = \frac{7}{6}$$

También,

$$\frac{1}{5} - \frac{2}{4} = \frac{4}{20} - \frac{10}{20} = \frac{4-10}{20} = -\frac{6}{20}$$

En símbolos:

$$\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q} : \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d + b.c}{b.d}$$

La **multiplicación entre dos números racionales** se obtiene multiplicando numeradores entre sí y denominadores entre sí. Por ejemplo:

$$\frac{2}{7}\cdot\left[-\frac{4}{3}\right]=\frac{2.(-4)}{7.3}=-\frac{8}{21}$$

En símbolos: $\forall \frac{a}{b},\frac{c}{d}\in\mathbb{Q}:\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{a.c}{b.d}$

Propiedades de las operaciones:

La adición y la multiplicación de números racionales cumplen con todas las propiedades definidas en $\mathbb{Z}$ y además en la multiplicación se define el inverso multiplicativo.

"Un número racional es el inverso multiplicativo de otro si el producto entre ambos es igual a 1"*.* En símbolos:

$$\forall\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}-\{0\}:\exists\frac{b}{a}\in\mathbb{Q}-\{0\}:\frac{a}{b}.\frac{b}{a}=\frac{b}{a}.\frac{a}{b}=1$$

Por ejemplo:

El inverso multiplicativo de $-\frac{5}{3}\ es\ -\frac{3}{5}\ pues\ -\frac{5}{3}.\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{10}{10}=1$

- Con la introducción de los números racionales se amplía la definición de potenciación con exponentes enteros negativos. Se define la potencia de un número racional con exponente negativo como otra potencia cuya base es el inverso multiplicativo de la base dada y cuyo exponente es el opuesto del dado. En símbolos:

$$\forall\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}-\{0\},\forall n\in\mathbb{Z}-\{0\}:\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

Por ejemplo:

$$(2)^{-3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3};\qquad\qquad\left(\frac{3}{2}\right)^{-5}=\left(\frac{2}{3}\right)^{5}$$

Observación: en la definición se excluye el caso en que la base y el exponente sean simultáneamente nulos, puesto que dicha potencia no está definida.

En el caso que la base sea nula y el exponente un entero no nulo, la potencia será nula. En caso de que el exponente sea nulo y la base un racional no nulo, la potencia será 1 tal como se definió en$\mathbb{Z}$.

En símbolos:

$$\forall n\in\mathbb{Z}-\{0\}:0^{n}=0\ \wedge\forall\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}-\{0\}:\left(\frac{a}{b}\right)^{0}=1$$

La división de un número racional por otro se define como el producto entre el dividendo y el inverso multiplicativo del divisor. Por ejemplo, la división del número racional 3 por $\frac{5}{4}$ consiste en obtener el producto entre 3 y $\frac{4}{5}$. La operación de división se simboliza con ":" o con la línea de fracción:

$$3:\frac{5}{4} = 3.\frac{4}{5} = \frac{12}{5}$$

En símbolos

$$\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}, \frac{c}{d} \neq 0: \ \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} . \frac{d}{c}$$

Propiedades de la potenciación en $\mathbb{Q}$

1) Distributiva de la potencia respecto de la multiplicación y de la división:

$$\forall a, b \in \mathbb{Q} \wedge n \in \mathbb{Z} : (a.b)^n \Rightarrow a^n . b^n$$

$$\forall a, b \in \mathbb{Q} \wedge n \in \mathbb{Z} : (a:b)^n \Rightarrow a^n : b^n$$

2) Ley Uniforme:

$\forall x \in \mathbb{Q} : a = b \Rightarrow a^x = b^x$ 3) Ley Cancelativa:

$\forall x \in \mathbb{Q} : a^x = b^x \Rightarrow a = b$

Propiedades especiales de la potencia

1) Producto de Potencias de igual Base: $a^n . a^m = a^{n+m}$
2) Cociente de Potencias de igual Base: $a^n : a^m = a^{n-m}$
3) Potencia de otra Potencia: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

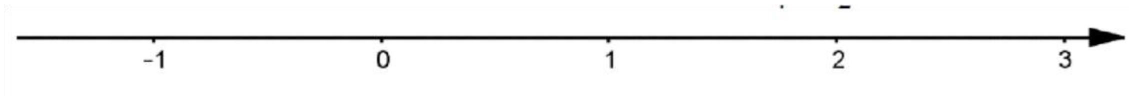
Representación de los números racionales en la recta numérica

Los números racionales también pueden representarse en la recta. Las fracciones $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots$ .que son partes de una unidad, se representan precisamente fraccionando el segmento unidad en tantas partes como indica el denominador. La fracción $\frac{3}{2}$ se representa como 3 veces $\frac{1}{2}$. Es muy importante notar que si dos fracciones son equivalentes se representan por un mismo punto en la recta numérica.

Entre dos números enteros existen sólo un número finito de números enteros. Por ejemplo, entre 5 y - 4 hay solo 8 números enteros; pero ¿cuántos números racionales hay?

Actividad

Represente en la recta numérica los números racionales $\frac{5}{4}$ y $\frac{3}{2}$



a) Escriba tres números racionales comprendidos entre $\frac{5}{4} y \frac{3}{2}$ y represéntelos en la recta numérica.

b) ¿Pueden obtenerse más números racionales entre $\frac{5}{4} y \frac{3}{2}$, además de los ya escritos?

c) ¿Cuántos racionales es posible encontrar entre dos números racionales?

Propiedades del conjunto

1) $\mathbb{Q}$ es un conjunto <u>infinito</u> y totalmente ordenado por la relación "≤".

2) No tiene primero ni último elemento.

3) $\mathbb{Q}$ es un conjunto denso, es decir, entre dos números racionales existen infinitos números racionales.

Expresión decimal Los números racionales suelen expresarse también en notación decimal, por ejemplo: $\frac{5}{10} = 0{,}5$ Aquellas fracciones que son equivalentes a una fracción con denominador 1, 10, 100 u otra potencia de 10 tienen una expresión decimal finita, y se denominan *fracciones decimales.*

Por ejemplo, $\frac{7}{25}$ es equivalente a $\frac{28}{100}$ por lo tanto es una fracción decimal y se expresa en notación decimal como 0,28 y se lee "veintiocho centésimos". Si no son equivalentes a una expresión con denominador que sea potencia de 10 tienen una expresión decimal *infinita periódica*. Esto significa que en la parte decimal existe una secuencia de uno o más números que se repite indefinidamente. A dicha secuencia se la denomina *periodo*. Por ejemplo, $\frac{3}{9}$ se expresa como 0,333..., y su periodo es 3. Para denotar el periodo se lo suele marcar con un arco " " sobre él.

Así, se tienen los siguientes ejemplos de números racionales y su representación decimal:

$$\frac{6}{100} = 0{,}06; \quad \frac{6}{9} = 0{,}6666 \ldots = 0{,}\widehat{6}; \qquad \frac{3540}{990} = 3{,}575757 = 3{,}\widehat{57}$$

La importancia de la notación decimal es que todas las fracciones equivalentes tienen una misma representación, finita o periódica. Así, por ejemplo:

$$\frac{7}{4};\frac{14}{18};\frac{35}{20};\frac{175}{100}$$

son fracciones equivalentes, y todas con la misma representación decimal 1,75 .

Si se quiere expresar una fracción en su expresión decimal, sólo basta con resolver la división planteada entre el numerador y el denominador de dicha fracción.

ACTIVIDADES

1) Actividades de investigación:

a) ¿cómo se clasifican las fracciones? Ejemplifique
b) ¿Cómo es obtienen fracciones equivalentes?
c) ¿cómo se representa un número decimal como fracción? (incluir decimales periódicos)
d) ¿Es posible representar en forma de fracción todos los números decimales?

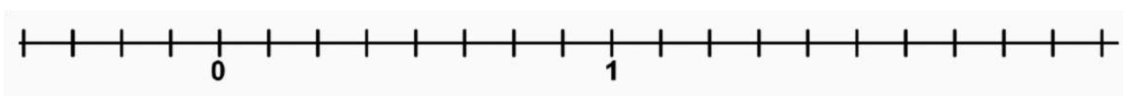
2) Ejercicios y problemas

a) Represente en la recta numérica los siguientes números racionales:

$$\frac{2}{5};\quad -\frac{2}{3};\quad \frac{7}{4};\quad -\frac{9}{4};\quad \frac{10}{3}$$

b) Ubique en la recta numérica los siguientes números racionales:

$$+1\frac{3}{4};\quad -\frac{375}{1000};\quad -\frac{3}{16}\quad y\quad 0{,}250$$



c) Determine la expresión decimal de los siguientes números racionales:

$$\frac{23}{5};\quad -\frac{72}{12}\frac{15}{11}\qquad -\frac{49}{75}\frac{451}{90}$$

d) Expresе como fracción los siguientes números decimales:

a) 1,25 b) 1,25 c) 1,25 d) 0,352121... e) 1,119

3) Resolver los siguientes problemas

a) El numerador y denominador de una fracción son números formados por las mismas dos cifras, pero dispuestas en orden inverso. Si la fracción equivale a 3/8, cuál es la suma de las 2 cifras mencionadas.

b) Un número racional irreductible x = p/q tiene las siguientes propiedades: i) 3/5 < x < 4/5 ii) Si se divide el intervalo [3/5; 4/5] en cinco partes iguales, el número «x» está en el punto medio del tercer intervalo. Calcular: p + q

c) En una reunión de 80 personas los tres quintos menos 2 personas son varones. ¿Qué fracción representa la diferencia entre varones y mujeres respecto del total?.

d) Rodrigo va todos los días de su casa al colegio por el único camino que hay y regresa a su casa presuroso al terminar la clase. Si Rodrigo recorriera los 2/3 de los 3/5 de los 7/3 de la mitad del camino de ida, estaría recorriendo 105 metros menos que si recorriera los 21/5 de los 4/7 de los 2/9 del camino usual de regreso. Cuántos metros recorrerá Rodrigo en transportarse de su casa al colegio y viceversa, en un día que fue dos veces al colegio?.

e) Una pieza mecánica para ser procesada pasa por tres etapas: en la primera se le añade acero, aumentando su peso en 1/5; en la segunda, al efectuar algunos cortes y agujeros, se pierde 1/10 del peso que quedaba; y en la tercera se le añade nuevamente acero, por lo que aumenta su peso en 3/10 del peso que quedaba. Si al final del proceso dicha pieza aumenta su peso en 202 gramos. Calcular su peso inicial.

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES

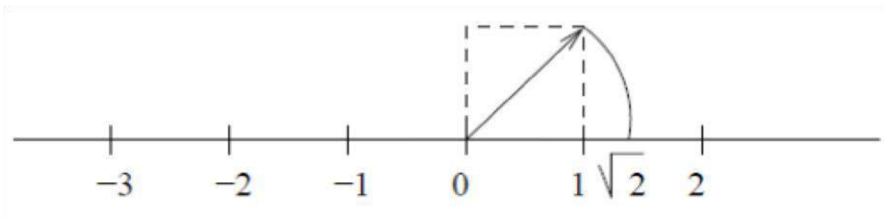
Si se pudiera marcar sobre la recta numérica todos los puntos correspondientes a los números racionales se advertiría que quedarían aún infinitos números sin marcar. Es decir, una vez elegido un segmento unidad, existen puntos en la recta que no se corresponden con ningún número racional.

Dos problemas sencillos: determinar la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado igual a 1, y determinar la longitud de una circunferencia de radio 1, revelaron la existencia de magnitudes que no tenían lugar dentro del conjunto de números racionales. Como se sabe, aplicando el Teorema de Pitágoras, la diagonal de un cuadrado de lado 1 es un número x tal que:

$$x^2 = 1^2 + 1^2$$
$$x = \sqrt{2}$$

Sin embargo, no existe ningún número racional que cumpla la propiedad de que su cuadrado sea igual a 2. Esto significa, que no es posible medir la longitud de la diagonal con un número entero de lados, ni tampoco fraccionando dicho lado en subunidades tan pequeñas como se quisiera. Sin embargo, es la medida de un segmento y por lo tanto puede pensarse como un número. Este número se llama *raíz cuadrada de 2* y se lo denota $\sqrt{2}$. Más aún, $\sqrt{2}$ es comparable con los números racionales, en el sentido que se puede determinar qué números racionales, son menores y cuáles mayores que él.

La siguiente figura muestra la correspondencia entre $\sqrt{2}$ y un punto de la recta numérica: el arco de la circunferencia indica que la medida de la diagonal se corresponde con $\sqrt{2}$.



.

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

El conjunto de los números reales se simboliza con $\mathbb{R}$ y está formado por todos los números que son racionales o irracionales. $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

Propiedades de la adición

1) La adición de números reales es cerrada, es decir la suma de dos números reales es un número real:

$$\forall\ a, b \in \mathbb{R} : a + b \in \mathbb{R}$$ **2)**

La adición de números reales es asociativa: ,

$$\forall\ a, b, c \in \mathbb{R} : (a + b) + c = a + (b + c)$$

3) La adición de números reales es conmutativa:

$$\forall\ a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a$$

4) El 0 es elemento neutro para la adición de números reales:

$$\forall\ a, \quad \in \mathbb{R} : \exists\ 0 \in \mathbb{R} : a + 0 = 0 + a = a$$

5) El opuesto de un número real es elemento inverso para la adición de números reales:

$$\forall\ a \in \mathbb{R} : \exists\ (-a) \in \mathbb{R} : a + (-a) = (-a) + a = 0$$

6) Propiedad uniforme de la adición de números reales:

$$\forall\ a, b, c \in \mathbb{R} : a = b \ \Rightarrow a + c = b + c$$

7) Propiedad cancelativa de la adición de números reales:

$$\forall\ a, b, c \in \mathbb{R} : a + c = b + c \Rightarrow a = b$$

Propiedades de la multiplicación

1) La multiplicación de números reales es cerrada, es decir el producto de números reales es un número real:

$$\forall\ a, b \in \mathbb{R} : a.\, b \in \mathbb{R}$$

2) La multiplicación de números reales es asociativa:

$$\forall\ a, b, c \in \mathbb{R} : (a.\, b).\, c = a.\, (b.\, c)$$

3) La multiplicación de números reales es conmutativa:

$$\forall\ a, b \in \mathbb{R} : a.\, b = b.\, a$$

4) El 1 es elemento neutro para la multiplicación de reales:

$$\forall\ a, \quad \in \mathbb{R} : \exists\ 1 \in \mathbb{R} : a.\ 1 = 1.\ a = a$$

5) El inverso multiplicativo de un número real no nulo es elemento inverso para la multiplicación de reales:

$$\forall\ a, \in \mathbb{R} - \{0\}: \exists\ a^{-1} - \{0\} \in \mathbb{R} : a.\ a^{-1} = a^{-1}.\ a = 1$$

6) El 0 es elemento absorbente para la multiplicación de reales:

$$\forall\ a, \quad \in \mathbb{R} : \exists\ 0 \in \mathbb{R} : a.\ 0 = 0.\ a = 0$$

7) Propiedad uniforme para la multiplicación de reales:

$$\forall\ a, b, c \in \mathbb{R} : a = b \ \Rightarrow a.\ c = b.\ c$$

8) Propiedad cancelativa para la multiplicación de números reales:

$$\forall\ a, b, c \in \mathbb{R} : a.\ c = b.\ c \Rightarrow a = b$$

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición:

$$\forall\ a, b, c \in \mathbb{R} : a.\ (b + c) = a.\ b + a.\ c$$

Propiedades de los opuestos aditivos

1) $\forall\ a \in \mathbb{R}: (-1).\ a = -a$
2) $\forall\ a \in \mathbb{R} : -(-a) = a$
3) $\forall\ a, b \in \mathbb{R} : (-a).\ b = a.\ (-b) \ -(a.\ b)$
4) $\forall\ a, b \in \mathbb{R} : (-a).\ (-b) = a.\ b$
5) $\forall\ a, b \in \mathbb{R} : -(a + b) = -a - b$
6) $\forall\ a, b \in \mathbb{R} : -(a - b) = b - a$

Propiedades de la compatibilidad de la adición y la multiplicación de reales con la relación "<"

1) $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R} : a < b \Rightarrow a + c < b + c$
2) $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R} : a < b \ \wedge c > 0 \Rightarrow a.\ c < b.\ c$
3) $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R} : a < b \ \wedge c < 0 \Rightarrow a.\ c > b.\ c$

El conjunto de números reales es un conjunto ordenado, ya que, dados dos números reales distintos siempre se puede establecer cuál es el mayor. A la relación de orden definida en $\mathbb{R}$ se indica con **"<"**

(**a < b** se lee: **a**: es menor que **b** o también **b** es mayor que **a**). Esta relación satisface las propiedades siguientes.

1) Ley de tricotomía : Cualesquiera sean los números reales a y b vale una y solo una de las relaciones siguientes:

a < b;　　　　**a = b ;**　　　　**a > b**

2) <u>Ley transitiva:</u> Cualesquiera sean los números **a, b** y **c**

Si a < b y b < c, a< c

<u>Valor Absoluto.</u>

Si **a** es un número real, el valor absoluto de **a** se indica **|a|** y se define así

|a|= a si a es cero o positivo (**a** ≥ **0**)

Y **|a| = -a** si a es un número negativo (**a < 0**) Ejemplos:

|+5| = 5; |0| = 0; |−8| = −(−8)es decir que |−8| = 8

Se puede ver que el valor absoluto es un número no negativo, también podemos definir valor absoluto de un número real de la siguiente manera:

Se llama módulo o valor absoluto de un número real, a la distancia que hay entre ese número y el 0. En símbolos el módulo de un número real ***a*** *se escribe* **|a|**

Potencias y Raíces de Números Reales

Potencia: Se llama potencia enésima de un número **a**, al producto de **n** factores iguales a **a**, siendo **n** un numero natural y se denota $\mathbf{a_n}$. El número **a** se llama base y el número **n** exponente

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \;\cdots\; \cdot a}_{n \text{ veces } a}$$

La potencia 2 de un número se llama su cuadrado y la potencia 3, su cubo. Para todo número real a distinto de cero el concepto de potencia se amplía con las definiciones siguientes.

$$\mathbf{a^0 = 1.}$$

$$\mathbf{a^{-p} = \frac{1}{a^p.}; p = N° \; \mathit{Natural}}$$

Con lo cual, si la base a es un numero real no nulo, la potenciación queda así definida para todo exponente entero.

Propiedades de la potencia: Sean a, b números reales no nulos; m, n números enteros I) Producto y cociente de potencias de igual base

$\mathbf{a^n . a^m = a^{n+m}}$ $\qquad$ $\mathbf{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$ Ejemplo:

$\mathbf{2^3 . 2^2 = 2^{3+2}}$ $\qquad$ $\mathbf{\frac{3^3}{3^2} = 3^{3-2}}$

8 . 4 = 32 $\qquad$ $\mathbf{\frac{27}{9}}$ **= 3**

32 = 32 $\qquad$ **3 = 3**

II) Potencias de productos y cocientes (Propiedad distributiva de la potenciación respecto del producto y del cociente)

$(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})^n = \mathbf{a}^n.\,\mathbf{b}^n$ $\qquad$ $(\frac{a}{b})^n = \frac{\mathbf{a}^n}{\mathbf{b}^n}.$

Ejemplo.

$(\mathbf{2}\,.\,\mathbf{3}\,)^2 = \mathbf{2}^2.\,\mathbf{3}^2$ $\qquad$ $(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{2}})^3 = \frac{\mathbf{4}^3}{\mathbf{2}^3}$

$\mathbf{6}^2 = \mathbf{4}\,.\,\mathbf{9}$ $\qquad$ $\mathbf{2}^3 = \frac{\mathbf{64}}{\mathbf{8}}$

36 = 36 $\qquad$ 8 = 8

III) Potencia de potencia.

$(\mathbf{a}^n)^m = \mathbf{a}^{n \cdot m}$

Ejemplo. $(\mathbf{2}^2)^3 = \mathbf{2}^{2 \cdot 3}$

$\mathbf{4}^3 = \mathbf{2}^6$

64 = 64

Raíz n-ésima de un Número Real

Dado **n** un número natural par y **a** un número real positivo se define la **raíz n-ésima** positiva de **a** y se escribe $\sqrt[n]{\mathbf{a}}$ al único número real positivo **b** tal que $\mathbf{b}^n$**= a**

Ejemplo: $\sqrt[5]{-\mathbf{32}}$**= -2**

Dado **n** un número natural impar y a un número real cualquiera se defines **la raíz n-ésima** de **a** y se escribe $\sqrt[n]{\mathbf{a}}$ al único número real positivo **b** tal que $\mathbf{b}^n$**= a**

<u>Observaciones:</u>

1- En la expresión $\sqrt[n]{\mathbf{a}}$**= b**, el símbolo $\sqrt{\ }$ se llama radical, el número **n** se llama índice, **a** el radicando y **b** la raíz enésima de **a.**

2- La ecuación $\mathbf{x}^2$**= a** con a positivo, tiene como solución **x=**$\sqrt{\mathbf{a}}$ y a su opuesto **x = -**$\sqrt{\mathbf{a}}$

Ejemplo= $\mathbf{x}^2$**= 4** ⇒ **x =**$\pm\sqrt{\mathbf{4}}$ **=** $\pm\,\mathbf{2}$

Potencias con exponentes racionales:

Dado un número real **a** positivo, **p** y **q** enteros, **q** diferente de cero, se define

$$\mathbf{a}^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\mathbf{a}^{\mathbf{p}}}$$

Las propiedades de la potenciación enunciadas para exponentes enteros resultan válidas para exponentes racionales.

Las propiedades de la radicación surgen de las de la potenciación, teniendo en cuenta la definición de potencias con exponentes racionales.

Ejemplo:
Ponemos en forma de potencia al 256 → $256 = 2^8$,

El índice del radical (2) se transforma en el denominador y el exponente del radicando (8) en el numerador y efectuamos las operaciones:

$$\sqrt{256} = \sqrt{2^8} = 2^{8/2} = 2^4 = 16$$

Radicales equivalentes

Utilizando la notación de exponente fraccionario y la propiedad de las fracciones que dice que si se multiplica numerador y denominador por un mismo número la fracción es equivalente, obtenemos que:

$$a^{m/n} = a^{(km)/(kn)} \qquad \rightarrow \qquad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$$

Si se multiplican o dividen el **índice** y el **exponente** o exponentes del **radicando** por un mismo **número natural**, se obtiene otro **radical equivalente**.

Ejemplo $\sqrt{2} = \sqrt[3\cdot 2]{2^{3\cdot 1}} = \sqrt[6]{2^3}$

Simplificación de radicales

Si existe un **número natural** que divida al **índice** y al **exponente** (o los exponentes) del radicando, se obtiene un **radical simplificado**.

Ejemplos Simplificar $\sqrt[6]{256}$

Ponemos en forma de potencia al 256 → $256 = 2^8$. Para simplificar el radical dividimos por 2 tanto el índice 6 como el exponente del radicando 8

$$\sqrt[6]{256} = \sqrt[6]{2^8} = \sqrt[3]{2^4}$$

Reducción a índice común

Para reducir a común índice dos a más radicales:

1 Hallamos el **mínimo común múltiplo de los índices**, que será el común índice

2 Dividimos **el común índice por cada uno de los índices** y cada resultado obtenido **se multiplica por sus exponentes** correspondientes

Ejemplo: Poner a común índice los radicales: $\sqrt{2};\ \sqrt[3]{2^2.3^2};\ \sqrt[4]{2^2.3^3}$

En primer lugar, hallamos el m.c.m. de los índices: 2,3 y 4 —— mcm (2,3,4) = 12

Dividimos el común índice 12 por cada uno de los índices 2, 3 y 4 y cada resultado obtenido se multiplica por sus exponentes correspondientes

$$\sqrt[2.6]{2^{1.6}};\ \sqrt[3.4]{2^{2.4}.3^{2.4}};\ \sqrt[4.3]{2^{2.3}.3^{3.3}}$$

Operamos con las potencias $\sqrt[12]{2^6};\ \sqrt[12]{2^8.3^8};\ \sqrt[12]{2^6.3^9}$

Extracción de factores en un radical Para extraer factores de un radical se descompone el radicando en factores.

Si:

- Un exponente del radicando es menor que el índice

El factor correspondiente se deja en el radicando.

$\sqrt{6}=\sqrt{2\cdot 3}$ $\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{3^2}$

- Un exponente del radicando es igual al índice El factor correspondiente sale fuera del radicando.

$$\sqrt{12}=\sqrt{2^2\cdot 3}=2\sqrt{3}$$

Descomponemos 12 en factores, como el 2 está elevado a la misma potencia que el índice podemos extraer el 2 del radicando

- Un exponente del radicando es mayor que el índice Se divide dicho exponente por el índice. El cociente obtenido es el exponente del factor fuera del radicando y el resto es el exponente del factor dentro del radicando

Ejemplo: $\sqrt{48}=\sqrt{2^4.3}=2^2\sqrt{3}$

El exponente del 2 es mayor que el índice, por tanto, se divide dicho exponente 4 entre el índice 2

El cociente obtenido 2 es el exponente del factor fuera del radicando y el resto 0 es el exponente del factor dentro del radicando.

Como el factor 2^0 es igual a 1, no es necesario colocarlo en el radicando ya que si se multiplica por otro factor este no varía

Ejemplo 2 $\sqrt[3]{243}=\sqrt[3]{3^5}=3\sqrt[3]{3^2}$

El exponente es mayor que el índice, por tanto, se divide dicho exponente (5) entre el índice (3).

El cociente obtenido (1) es el exponente del factor fuera del radicando y el resto (2) es el exponente dentro del radicando

- Introducción de factores en un radical: Para introducir factores en un radical se elevan los factores al **índice** del **radical**.

$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$

ejemplo

1) $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}$

2) $2^2 \cdot 3^3 \sqrt[4]{6} = \sqrt[4]{(2^2)^4 \cdot (3^3)^4 \cdot 2 \cdot 3}$

$2^2 \cdot 3^3 \sqrt[4]{2 \cdot 3} = \sqrt[4]{2^9 \cdot 3^{13}}$

- Suma de radicales Solamente pueden **sumarse** (o **restarse**) **dos o más radicales** cuando son **radicales semejantes**, es decir, si son **radicales** con el **mismo índice** e **igual radicando**.

Para sumar radicales con el mismo índice e igual radicando se suman los coeficientes de los radicales.

$$a\sqrt[n]{k} + b\sqrt[n]{k} + c\sqrt[n]{k} = (a+b+c)\sqrt[n]{k}$$

Ejemplos:

1 $2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + \sqrt{2}$ **=** $(2-4+1)\sqrt{2} = -\sqrt{2}$

- ➢ Multiplicación de radicales con el mismo índice Para **multiplicar radicales con el mismo índice se multiplican los radicandos y se deja el mismo índice**.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Ejemplo:

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$

Cuando terminemos de realizar una operación extraeremos factores del radical, si es posible.

- Multiplicación de radicales con distinto índice Primero se reducen a común índice y luego **se multiplican**.

Ejemplos: $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[4]{27}=$

Descomponemos en factores los radicandos $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[4]{27}==\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3^2}\cdot\sqrt[4]{3^3}$

Reducimos a común índice por lo que tenemos que calcular el mínimo común múltiplo de los índices, que será el común índice. Mcm(2,3,4)=12

$$=\sqrt[12]{3^6}\cdot\sqrt[12]{(3^2)^4}\cdot\sqrt[12]{(3^3)^3}=\sqrt[12]{3^6\cdot 3^8\cdot 3^9}=\sqrt[12]{3^{23}}=3\sqrt[12]{3^{11}}$$

- División de radicales con el mismo índice: Para dividir radicales con el mismo índice **se dividen los radicandos y se deja el mismo índice.**

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Ejemplo:

$$\frac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{16}}=\sqrt[6]{\frac{128}{16}}=\sqrt[6]{\frac{2^7}{2^4}}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{2}$$

- División de radicales con distinto índice Primero se reducen a índice común y luego **se dividen.**

Ejemplo

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}=\sqrt[6]{\frac{4^2}{2^3}}=\sqrt[6]{\frac{(2^2)^2}{2^3}}=\sqrt[6]{\frac{2^4}{2^3}}=\sqrt[6]{2}$$

- Raíz de un radical: La **raíz de un radical** es otro **radical** de **igual radicando** y cuyo **índice** es el **producto de los dos índices**.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$$

Ejemplo: $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}}=\sqrt[24]{2}$

Racionalización

La racionalización de radicales consiste en quitar los radicales del denominador, lo que permite facilitar el cálculo de operaciones como la suma de fracciones

Podemos distinguir tres casos:

Caso 1 Racionalización **del tipo** $\frac{a}{b\sqrt{c}}$ Se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{c}$

$$\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a\cdot\sqrt{c}}{b\sqrt{c}\cdot\sqrt{c}} = \frac{a\cdot\sqrt{c}}{b\left(\sqrt{c}\right)^2} = \frac{a\cdot\sqrt{c}}{b\cdot c}$$

Ejemplos:

$$\frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3\cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Caso 2 Racionalización **del tipo**

$$\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}}$$

Se multiplica numerador y denominador por $\sqrt[n]{c^{n-m}}$

$$\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}} = \frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\sqrt[n]{c^m}\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}} = \frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\sqrt[n]{c^m\cdot c^{n-m}}} = \frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\cdot c}$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{3\sqrt[5]{4}} = \frac{2}{3\sqrt[5]{2^2}} = \frac{2\cdot\sqrt[5]{2^3}}{3\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt[5]{2^3}} = \frac{2\cdot\sqrt[5]{2^3}}{3\sqrt[5]{2^2\cdot 2^3}} = \frac{2\cdot\sqrt[5]{2^3}}{3\cdot 2} = \frac{\sqrt[5]{8}}{3}$$

Caso 3 Racionalización **del tipo**

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$

Y en general cuando el denominador sea un **binomio con al menos un radical.**
Se multiplica el numerador y denominador por el conjugado del denominador. El conjugado de un binomio es igual al binomio con el signo central cambiado:

$$a+b \longrightarrow a-b$$
$$-a+b \longrightarrow -a-b$$
$$a-b \longrightarrow a+b$$
$$-a-b \longrightarrow -a-b$$

También tenemos que tener en cuenta que: "**suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados**".

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

Ejemplos:

1 $\dfrac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador, quitamos paréntesis en el numerador y efectuamos la suma por diferencia en el denominador, por lo que obtenemos una diferencia de cuadrados

$$\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}=\frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}=-2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

Ejemplo 2

$$\frac{2}{4-2\sqrt{2}}=\frac{2(4+2\sqrt{2})}{(4-2\sqrt{2})(4+2\sqrt{2})}=\frac{2(4+2\sqrt{2})}{16-4\cdot 2}=\frac{2(4+2\sqrt{2})}{8}=\frac{4+2\sqrt{2}}{4}$$

Ejercicios de Aplicación:

$\sqrt{2}\sqrt{6}\sqrt{3}-\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{3}=$

2) $\dfrac{\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^{-3}\cdot\sqrt{\frac{4}{5}}\cdot\left(\sqrt{\frac{5}{4}}\right)^{-1}}{\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}}=$

3) $5\sqrt{3}+4\sqrt{48}--3\sqrt{12}+4\sqrt{27}=$

4) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}-\sqrt{18}}=$

1) 5) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{-9}}=$

6) $\left(\sqrt[4]{7}-1\right)\left(\sqrt[4]{7}+1\right)=$

Logaritmo

Definición: sea **a** un número real positivo distinto de 1, si **b** es otro número real positivo, se llama logaritmo en base **a** de **b** al único numero **x**, que verifica $a^x = b$

Es decir $\log_a b = x$ si y solo si $a^x = b$ **a> 0, b > 0 ; a≠ 1** Ejemplos:

$\log_2 8$; $\log_2 8 = 3$ porque $2^3 = 8$

$\log_3 \frac{1}{9}$; $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ porque $3^{-2} = \frac{1}{9}$

Observaciones: se $a \in \mathbb{R}$, a positivo ≠ 1, siempre se cumple que:

$\log_a 1 = 0$ ya que $a^0 = 1$

$\log_a a = 1$ ya que $a^1 = a$

Propiedades:

I) El logaritmo del producto es la suma de los logaritmos de los factores

$$\log_a(p \cdot q) = \log_a p + \log_a q \quad , (a, p, q \text{ positivos } a \neq 1)$$

II) El logaritmo de un cociente es la diferencia de los logaritmos del dividendo y del divisor

$$\log_a\left(\frac{p}{q}\right) = \log_a p + \log_a q \quad , (a, p, q \text{ positivos } a \neq 1)$$

III) El Logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base de dicha potencia.

$$\log_a p^n = n\log_a p \quad (a, p \text{ positivos } a \neq 1)$$

Logaritmos decimales y logaritmos neperianos:

Se llaman logaritmos decimales o de Briggs, a los logaritmos de base 10 y se indica: $\log_{10} a = \log a$

Se llaman logaritmos neperianos o naturales a los logaritmos de base de **e** de Neper, donde **e** es un número irracional cuyo valor es **e= 2,71828** y se indica: $\log_e a = \ln a$.

Actividades de Autoevaluación: Conjunto de Números Reales.

1) Señale entre los números siguientes, cuales son naturales, cuales enteros, cuales racionales y cuales irracionales.

$$-\frac{2}{3}, 5; 0,7; \ -3,4; \ \frac{\pi}{2}; \ \sqrt{3}; 2e; \ \pi$$

2) Dado el conjunto **X** ; 0,85, 62 }, encuentra:

a) **X U** $\mathbb{Q}$ **b) X U** **c) X U** $\mathbb{I}$ **d) X U** $\mathbb{N}$ **e) X U** $\mathbb{N}$

3) Contesta si las siguientes afirmaciones son verdaderas o Falsas
a) La diferencia de dos números naturales es otro natural
b) Existen infinitos números racionales entre 1 y 2
c) Si **a= -2** y **b = 0,** entonces **a:b = 0**
d) El cociente entre un numero y su opuesto es igual a (-1)
e) Para todo $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$, $(\boldsymbol{a}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{a}$

4) Representa con símbolos:
a) Tres números enteros consecutivos
b) Un número impar
c) Dos números pares consecutivos
d) El opuesto de un número
e) El inverso de un número distinto de cero
f) 2 es menor que 10
g) 7 es mayor que 5
h) a es menor o igual que 5
i) n es menor o igual que b
j) a no es menor que b
k) a no es mayor que b
l) a no es igual a b
m) x está comprendido entre 1 y 2
n) x está comprendido entre 4 y 6 o es igual a 6
ñ) x está comprendido entre 4 y 6 o es igual a 4 o es igual a 6

5) Elige la opción correcta
a) Si **n** es un numero tal que **n** $\in \mathbb{Z}$, entonces ¿Cuál/es de las siguientes expresiones representa/n tres números consecutivos?

i) 2n, 2n +1, 2n +2 **ii)** 4n, 4n +2 , 4n +4 **iii)** 2n -2, 2n -1, 2n
opciones **Solo iii** **i y ii** **i y iii** **ii y iii** **todas**

b) Si $\boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{b} \in \mathbb{N}$, entonces el conjunto más pequeño al que pertenece siempre $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ es ……

Opciones $\mathbb{R}$ $\mathbb{I}$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{N}$

c) Cuál de las siguientes expresiones no es racional

Opciones $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{0}}$ $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{6}}\,\mathbf{2}$ **0,3** $\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}$ $\frac{\mathbf{-1}}{-(\mathbf{-5})}$

d) ¿Qué número dividido por $\frac{p}{5}$ da como resultado $\frac{5}{p}$

Opciones $\frac{p^2}{5}$ $\quad \frac{p}{5}$ $\quad (\frac{p}{5})^2$ $\quad$ **1**

6) Califica con verdadero o falso

a) $-\frac{3}{2}$ es un número irracional d) $\sqrt{2}-1$ es un número racional

b) $\frac{18}{3}$ es un número entero e) $2,38\overset{\frown}{7}$ es un número irracional

c) $\sqrt[3]{-8}$ es un número irracional

7) a) ¿Cuál es mayor $\frac{11}{12}$ o $\frac{12}{13}$? b) ¿Cuál es menor $\frac{17}{12}$ o $\frac{29}{20}$?

8) Se reparten $ 63.000 entre tres personas de modo que la primera persona tiene el doble que la segunda y la tercera $\frac{2}{3}$del total de las otras dos ¿Cuánto le corresponde a cada una?

9) Un profesor de matemáticas ocupa 2/5 del tablero para copiar el enunciado de un problema, 1/7 para ilustrar el enunciado gráficamente y 2/11 para resolver el problema ¿Qué parte del tablero queda limpia?

10) Escribir la expresión decimal de: $\frac{1}{3}; \frac{7}{9}; \frac{5}{6}; \frac{8}{7}; \frac{-23}{11}; \frac{5}{15}$

11) Escriba en forma de fracción los siguientes números decimales periódicos

a) $0,7\overset{\frown}{9}$, $b)$ $1,23\overset{\frown}{5}$; $c)$ $2,\overset{\frown}{7}$ $d)$ $4,3\overset{\frown}{7}$ $e)$ $3,80\overset{\frown}{4}$ $f)$ $0,2\overset{\frown}{3}$ $g)$ $0,2\overset{\frown}{3}$

12) Califique como verdadero o falso. Justifique su respuesta

a) $\frac{3}{2} + a = a + \frac{3}{2}$

b) $(-\sqrt{2})$.(5 – b) = -5.

c) 3 + 3.4 = 20

d) 2 + 3.4 = 14

e) a.7 = (a.5) + (2.a)

f) $\frac{2}{7+5} = \frac{2}{7} + \frac{2}{5}$

13) Decidir si las siguientes proposiciones son Verdaderas o Falsas. En caso de que la proposición sea falsa dar un ejemplo en donde la misma no se cumpla.

a) Un número entero es siempre un número natural

b) Un número natural es siempre un número entero

c) Un número racional es siempre un número entero

d) Un número entero es siempre un número racional

e) Un número natural es siempre un número racional
f) Un número irracional es un número fraccionario
g) Un número real es, un número racional o un número irracional

14) Aplicando las propiedades de la potenciación expresar los siguientes productos y cocientes como potencias únicas; nombrar la propiedad o propiedades aplicada/s; luego calcular el resultado final.

a) $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^3 =$ b) $\left(-\frac{4}{7}\right)^3 : \left(-\frac{4}{7}\right) =$ c) $\left(\frac{5}{6}\right)^{-4} : \left(\frac{5}{6}\right)^{-2} =$

d) $0,3^3 \,.\, 0,3^{-2} \,.\, 0,3 =$ e) $(-0,9)^{-8} : (-0,9)^{-6} =$ f) $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^3\right]^{-2} =$

g) $[(1,1)^{-1}]^2 =$ h) $\left[(-1,5)^{-\frac{2}{3}}\right]^3 =$ i) $\left[\left(-\frac{3}{4}\right)^{\frac{6}{5}}\right]^{-\frac{5}{2}} =$

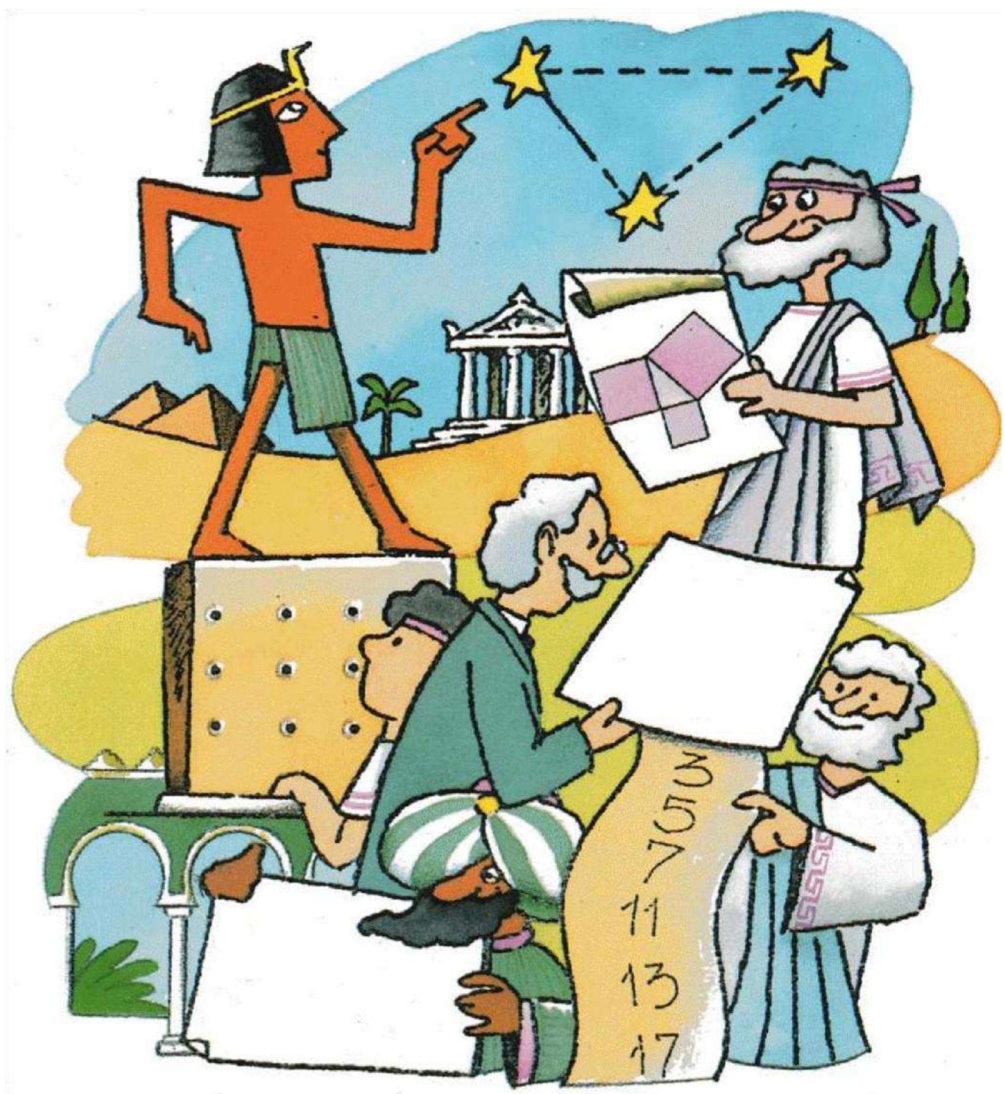
15) Calcular:

1) $\log_2 8 =$ 2) $\log_3 9 =$ 3) $\log_4 2 =$
4) $\log_{27} 3 =$ 5) $\log_5 0,2 =$ 6) $\log_2 0,25 =$
7) $\log_{0,5} 16 =$ 8) $\log_{0,1} 100 =$ 9) $\log_3 27 + \log_3 1 =$
10) $\log_5 25 - \log_5 5 =$ 11) $\log_4 64 + \log_8 64 =$

UNIDAD N°2: GEOMETRÍA

Orígenes de la Geometría

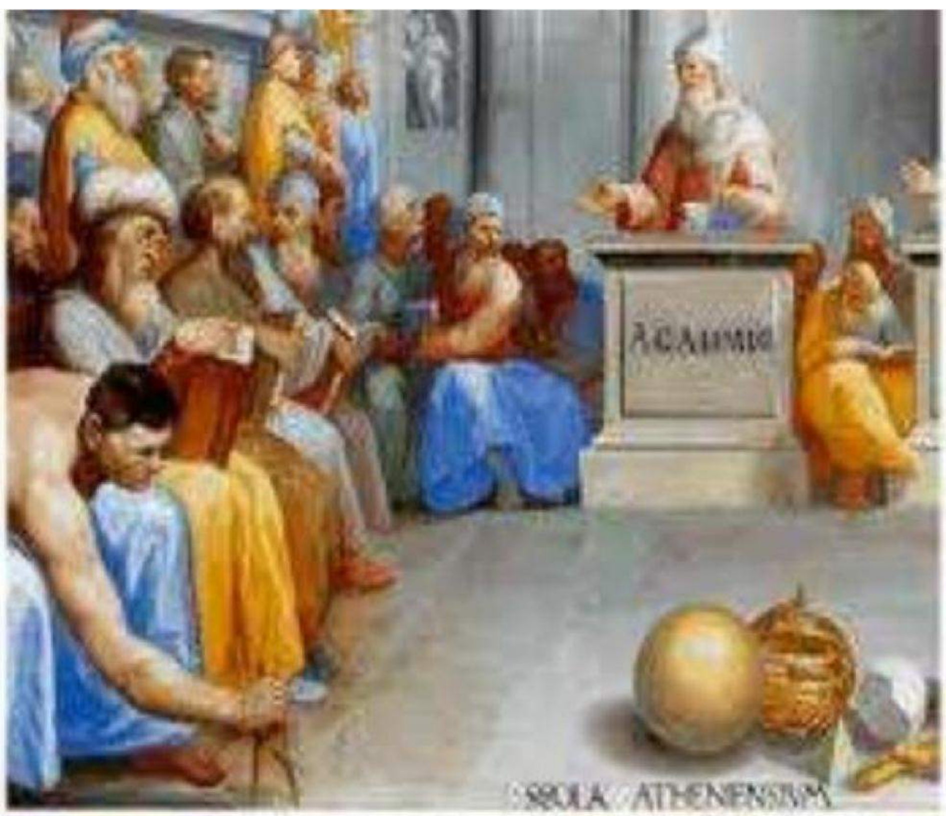
La Geometría es la parte de la Matemática que estudia las propiedades de las figuras y de los cuerpos, prescindiendo de su tamaño, de su posición y de la materia que los constituye, estudia también la medida de las superficies y de los volúmenes. Desde los comienzos de la civilización los objetos que rodearon al hombre, los hechos que acompañaron su vida, fueron formando en él, el concepto de rectas y curvas.



La Geometría como palabra tiene dos raíces griegas, geo=tierra y metrón=medida, o sea, significa “medida de la Tierra”. Su origen, unos tres mil años antes de Cristo, se remonta al Medio Oriente en particular al

Antiguo Egipto, en la que necesitaba medir predios para el cultivo alrededor del rio Nilo, que se desbordaba periódicamente y exigía el trazado de paralelas y perpendiculares, además de mediciones también por supuesto en la construcción de pirámides y monumentos. Esta concepción geométrica se aceptaba sin demostración, era producto de la práctica.

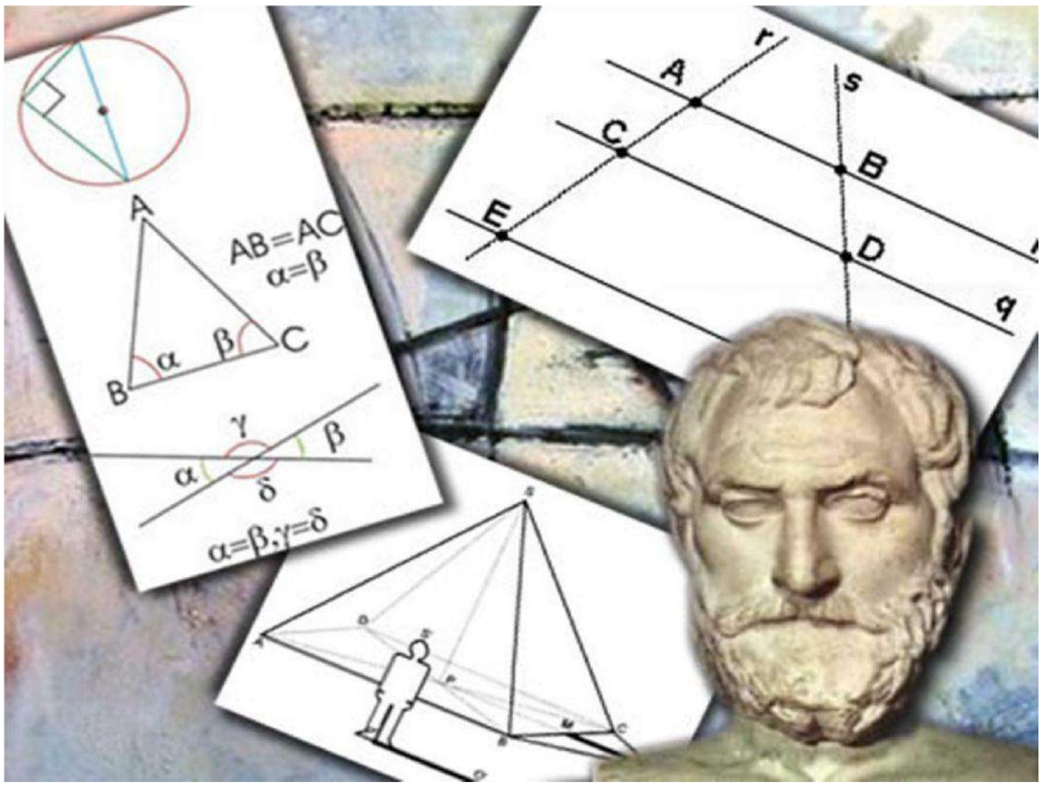
El pueblo griego tuvo la gloria de dar a la Geometría un carácter netamente científico, reuniendo todos los conocimientos diseminados y adquiridos en forma empírica a través de los siglos.



La Academia de Atenas. Fragmento de un fresco de la Biblioteca de El Escorial de P.Tibaldi. 1586.

Era tal la importancia que este pueblo le daba al estudio de la Geometría, por su influencia en la formación mental, que en la entrada a la Escuela Filosófica de platón, figuraba la leyenda “Nadie puede entrar sin haber estudiado Geometría”

Entre los primeros geómetras griegos destacamos a Thales de Mileto, quien, unos 6 siglos antes de Cristo inició la geometría demostrativa. Donde las propiedades se demuestran por medio de razonamientos y no porque resulten en la práctica. Demostró numerosas propiedades de ángulos, triángulos y segmentos proporcionales.



Otro matemático notable, fue Pitágoras, quien recibió algunos conocimientos y consejos de Thales de

Mileto que ya era anciano. En un teorema que lleva su nombre, Pitágoras demostró una relación fundamental que vincula los lados de un triángulo rectángulo.

Euclides fue otro gran matemático griego, del siglo III antes de Cristo, quien en su famosa obra titulada "Los Elementos", recopila, ordena y sistematiza todos los conocimientos de geometría hasta su época, y salvo algunas variaciones, son los mismos conocimientos que siguen enseñando en nuestros días.

Loa Elementos de Euclides están constituidos por trece libros, en los cuales se desarrolla y fundamenta la geometría en forma lógica y sistemática.
De los trece libros, los cuatro primeros se refieren a la geometría plana, el quinto trata de las proposiciones, el sexto de las magnitudes inconmensurable; en el séptimo, octavo y noveno se desarrolla la teoría de los números racionales; en el décimo la de los irracionales, que reciben por primera vez fundamento sólido y en los últimos tres trata sobre la geometría del espacio.

Euclides reconoce dos tipos de proposiciones: los principios, que se aceptan sin demostración y los teoremas, que se demuestran a partir de los primeros.

Entre los principios distingue:

- Definiciones: simples menciones o descripciones de los elementos a considerar.
- Postulados: principios particulares de cada disciplina en cuestión.
- Nociones comunes o axiomas: principios generales.

Algunas **Definiciones** son:

D1: Punto es lo que no tiene partes.

D2: Línea es una longitud sin anchuras.

D3: Los extremos de una línea son puntos.

D14: Una figura es lo contenido por uno o más límites. Entre otras.

Los **Postulados** apuntan a establecer existencia y unicidad de determinados entes geométricos.

P1: Desde un punto a otro puede trazarse una recta

P2: Una recta puede prolongarse indefinidamente en cualquiera de sus dos direcciones. Entre otros.

P3: Dado un punto y un segmento siempre se puede construir un círculo con ese punto como centro y ese segmento como radio.

A continuación de los postulados siguen las **Nociones Comunes** que los pitagóricos y aristotélicos llamaban axiomas y hacen referencia a cuestiones generales que pueden aplicarse no solo a la geometría, sino también a otros ámbitos. Algunas son:

N1: Cosas iguales a una misma cosa, son iguales entre sí.

N2: Si a cosas iguales se les agregan cosas iguales, se obtienen cosas iguales.

A partir de los postulados y nociones comunes, Euclides obtiene deductivamente una serie de proposiciones, entre las cuales se distinguen teoremas y construcciones.
Todo teorema o proposición que deseemos demostrar debe reducirse finalmente a los axiomas iniciales, que deben estar claros desde el principio. El conjunto de estos axiomas forman un sistema axiomático y constituye la materia prima y la herramienta con las cuales se construirá el resto de la geometría euclídea.

En general, los resultados que se demuestran se llaman lemas, proposiciones, teoremas y corolarios. Todos ellos son afirmaciones que se demuestran que son verdaderas a partir de los axiomas (o de los resultados ya demostrados).

Un **Lema** suele ser un resultado auxiliar un paso de la demostración de un Teorema pero que conviene aislar porque se repite en las demostraciones de distintos teoremas.

Una **Proposición** es un resultado intermedio, con cierta importancia por sí mismo. Puede ser una consecuencia directa de una definición, que conviene escribir para referirnos a ella cuando la necesitemos aunque no sea muy relevante.

Un **Teorema** es en general un resultado importante, una afirmación verdadera pero no tan inmediata como una proposición.

Un **Corolario**, en cambio, es un resultado que se demuestra de inmediato a partir de un teorema. Suele ser un caso particular de una situación mucho más amplia, que si bien está contenido en el resultado del teorema, conviene aislar.

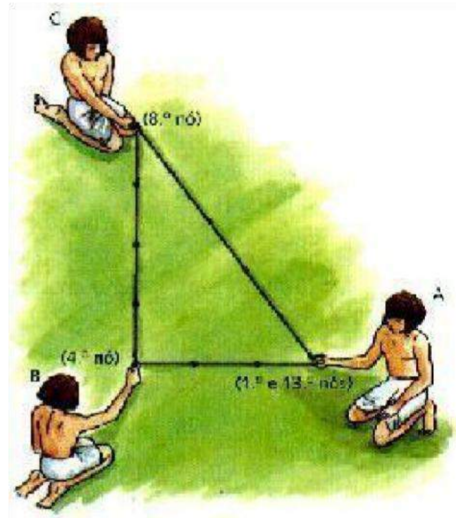
Construcciones geométricas

En la obra EUCLIDES Y SUS ELEMENTOS de Rey Pastor y Babini se menciona:

“Tampoco hay en los

Elementos mención alguna a instrumentos geométricos, y si bien suele decirse que la geometría de Euclides **no admite sino construcciones con regla y compás** hay que agregar que estas palabras no figuran en el tratado y que de atenerse al mismo, habrá que decir que solo admite construcciones con rectas y circunferencias, y siempre que tales construcciones obedezcan al sistema.

O sea que los instrumentos por excelencia de la geometría euclidiana clásica son la regla y compás. Pero no son mencionados en los Elementos de Euclides. Ambos son instrumentos de tipo ideal, derivados de la geometría hecha con cuerdas de los egipcios



ACTIVIDADES:

1) Nombre las principales actividades humanas que dieron origen a los conceptos geométricos.
2) Cite cuales de esos usos o conceptos de la Geometría siguen vigentes en la actualidad, aunque sea con algunas modificaciones, y en que profesiones u oficios de los utiliza. De ejemplos.
3) Nombre otras aplicaciones de la Geometría en la actualidad.
4) Teniendo en cuenta los Postulados y Nociones Comunes de Euclides construir: “Un triángulo equilátero con un segmento AB dado como lado”

A--------------------B

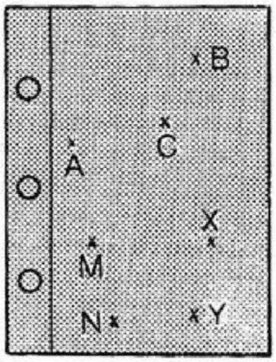
Siguiendo los pasos:

a) Dado el segmento AB, comenzamos colocando el compás en el punto A, y trazamos un círculo utilizando como radio este segmento.
b) Ahora, trazamos otro círculo con centro en B y el segmento AB como radio.
c) Unimos uno de los puntos donde se intersecan ambos círculos (llamémoslo C) entre A y B.

GEOMETRÍA.

Entes geométricos fundamentales.

Punto.

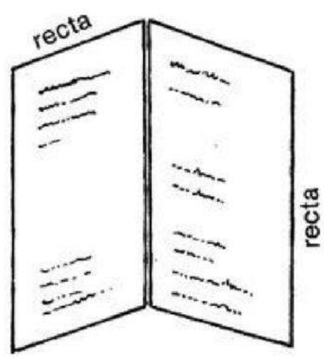


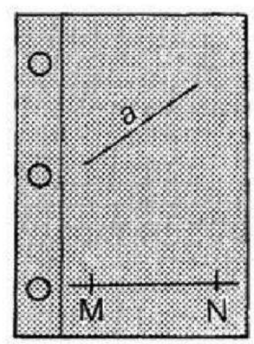
Un grano de arena, la señal que deja la punta del lápiz sobre el papel, o de la tiza sobre el encerado nos dan idea de *punto*. El punto se señala por una letra mayúscula.[1]

Puntos A; B; C; M; N; X; Y.

Recta.

El borde de una regla, un hilo de alambre bien extendido, el canto de un cuaderno, el hilo de la plomada, los renglones de una hoja de cuaderno o de carpeta, etc., nos dan idea de *línea recta*, o simplemente de *recta*.





rectas *a* y MN

Las rectas se indican por medio de dos letras mayúsculas que corresponden a dos de sus puntos, o por medio de una letra minúscula manuscrita.[1]

[1] Según la notación tradicional, los puntos se designan con letras mayúsculas y las rectas con minúsculas, tal como lo expresamos. Pero no debe sorprenderte si en alguna parte ves una recta indicada con una letra mayúscula (la recta es un conjunto), y un punto con una minúscula (el punto es un elemento).

Conceptos primitivos

Así como la Aritmética se estructura en base a elementos fundamentales llamados números y de los cuales se estudian las propiedades y a los cuales se les aplican operaciones, así la Geometría se basa en ciertos entes fundamentales (geométricos) llamados:

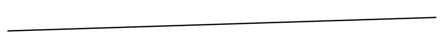
PUNTO, RECTA y PLANO

Estos entes geométricos son muy importantes en el estudio de la Geometría. No los podemos definir, solo observar objetos que los representan.

Punto: es una idea o abstracción. Un punto no puede definirse con términos sencillos, es un término indefinido.

Se lo representa geométricamente por la marca que deja el lápiz sobre el papel o la tiza sobre el pizarrón. Como la marca más pequeña que se puede dibujar. Se lo simboliza o denota con letras mayúsculas.

Recta: es una idea o abstracción. Es un término indefinido. Se la representa geométricamente como una línea de longitud ilimitada. Se la considera como un conjunto de infinitos puntos alineados. Se la simboliza o denota con dos letras mayúsculas de imprenta o una letra minúscula.

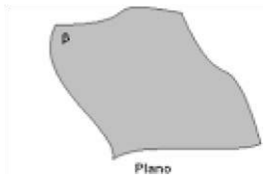


A B

Recta r Recta AB

Plano: es una idea o abstracción, debido a que no puede definirse con términos más sencillos. Se lo representa geométricamente mediante un trozo de él, como el corte más delgado posible. Está formado por infinitos puntos o infinitas rectas una al lado de la otra.

Para denotarlos se usan letras griegas.



Espacio. Definición: es el conjunto de todos los puntos (universo). Es ilimitado, sin longitud, anchura ni altura.

Para dedicarnos al estudio de la Geometría Euclidiana, necesitamos de propiedades que surgen de la observación y la experiencia (y que se aceptan como verdaderas) llamadas Postulados o Axiomas. A partir de estos axiomas y definiciones se pueden probar otras propiedades que llamaremos **Teoremas.** El conjunto de axiomas, definiciones y teoremas forman un Sistema Axiomático.

Axiomas o Postulados

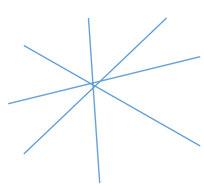
Los Axiomas o Postulados se organizan en Axiomas de: Existencia, Enlace o Incidencia, Orden, Congruencia, Paralelismo, Continuidad.

Los Axiomas de Existencia reconocen la existencia de infinitos entes denominados *puntos,* el conjunto de los cuales denominamos *espacio.*

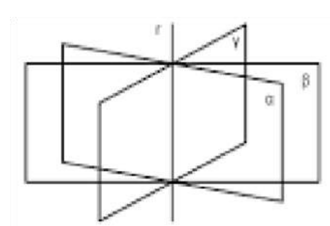
Los puntos del espacio se consideran agrupados en ciertos conjuntos parciales o subconjuntos de infinitos puntos, denominados planos. Y, los puntos de cada plano se consideran agrupados en otros conjuntos parciales o subconjuntos de infinitos puntos, denominados rectas.

A_1: “Existen infinitos puntos, infinitas rectas e infinitos planos”.

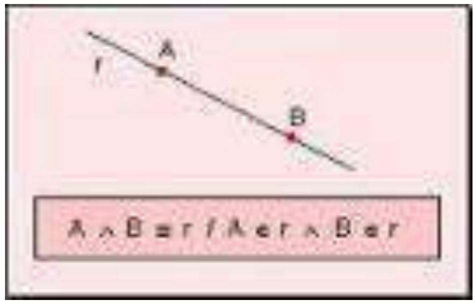
A_2: “Por un punto del plano pasan infinitas rectas”.



A_3: “Por una recta pasan infinitos planos”

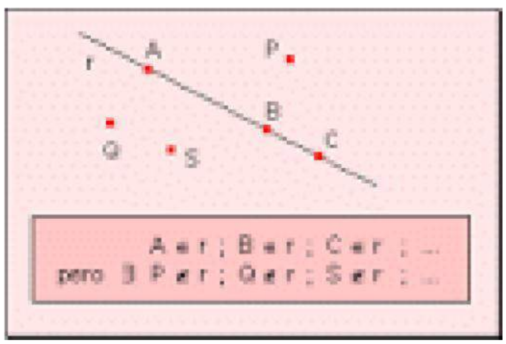


Axiomas de Enlace o Incidencia A_4:"Dos puntos determinan una y solamente una recta" o "Dados dos puntos distintos existe una y solamente una recta a la cual pertenecen"

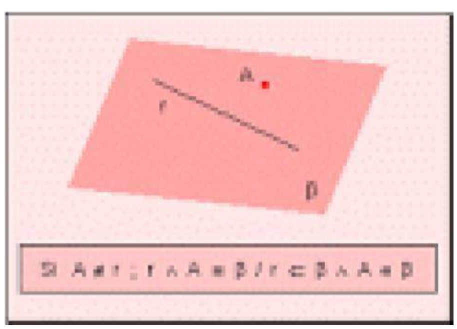


Consecuencia: "Dos rectas que tienen dos puntos en común son coincidentes".

A_5: "A una recta pertenecen infinitos puntos y también existen infinitos puntos que no pertenecen a ella".



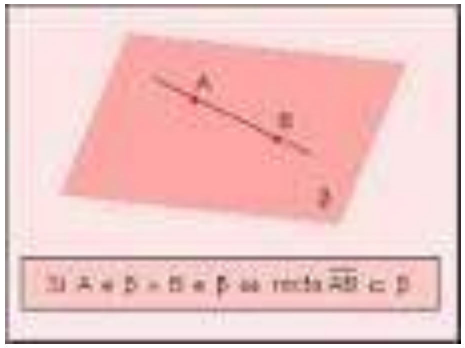
A_6: "Una recta y un punto que no pertenece a ella determinan un plano al cual pertenecen" o "Tres puntos no colineales están contenidos en uno y solo un plano"



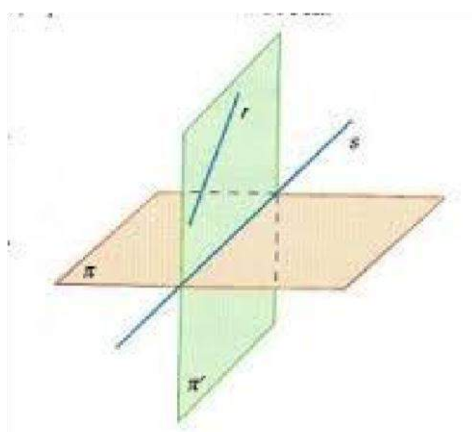
<u>**Definición:**</u> puntos colineales son los que están en la misma recta.

Es importante aclarar que tres puntos pueden ser colineales aunque las rectas no estén marcadas.

Definición: puntos coplanares, son tres o más puntos no colineales que se encuentran en un mismo plano. A_7: "La recta determinada por dos puntos del plano pertenece al mismo plano" o "Si dos puntos pertenecen a un plano, la recta que pasa por esos dos puntos también pertenece a dicho plano".



A_8: "Si dos planos se intersecan, se intersecan exactamente en una recta"



Algunas definiciones:

Figura plana: es una figura con todos los puntos en un plano, pero no todos en una recta. Son figuras: Triángulo, rombo, etc.

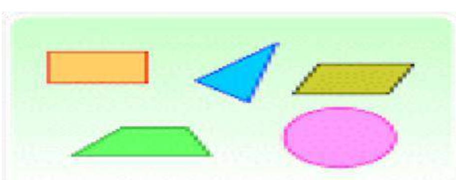
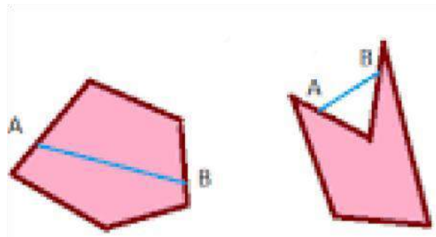


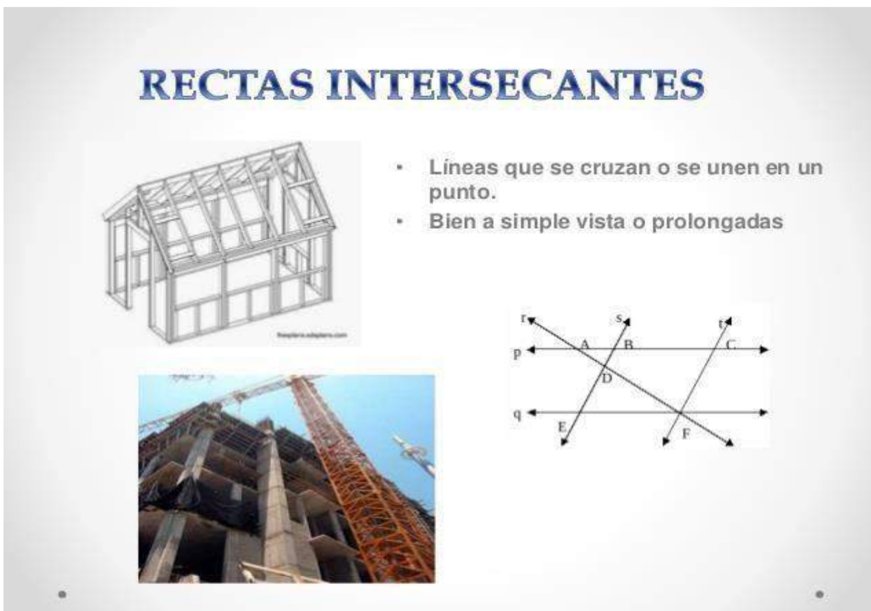
Figura convexa: se dice que una figura es convexa cuando todo par de puntos de una figura determina un segmento incluido en ella.

<u>Figura cóncava</u>: se dice que una figura es cóncava, cuando no es convexa. Es decir que existe por lo menos un segmento determinado por dos de los puntos de la figura,

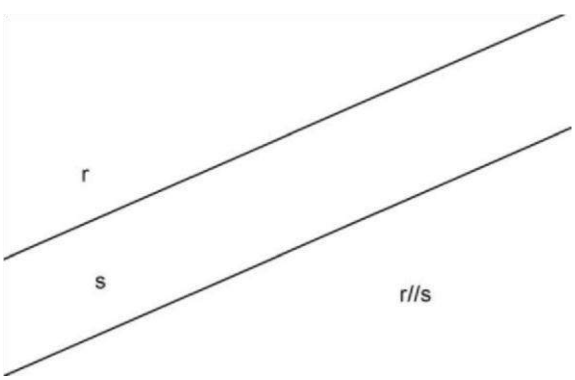


que no está completamente incluido en ella.

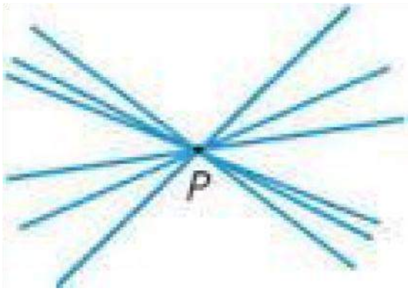
<u>Rectas intersecantes o secantes</u>: si dos rectas se cortan en un punto se llaman secantes o intersecantes.



<u>Rectas paralelas</u>: rectas que están en el mismo plano y no se intersecan se denominan rectas paralelas.



Las rectas *r* y s no tienen un punto en común. r es paralela a s **Rectas concurrentes**: son tres o más rectas coplanares que tienen un punto en común.



Las rectas r, m, t, s, f, g tienen un punto en común.

$r \cap m \cap t \cap s \cap f \cap g = \{P\}$

TRABAJO PRACTICO N° 1

1) Indicar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justificar indicando axioma o postulado, definición, etc. que justifique la respuesta.

a) $r \subset \pi$

b) $(A, E, D) \equiv \pi$

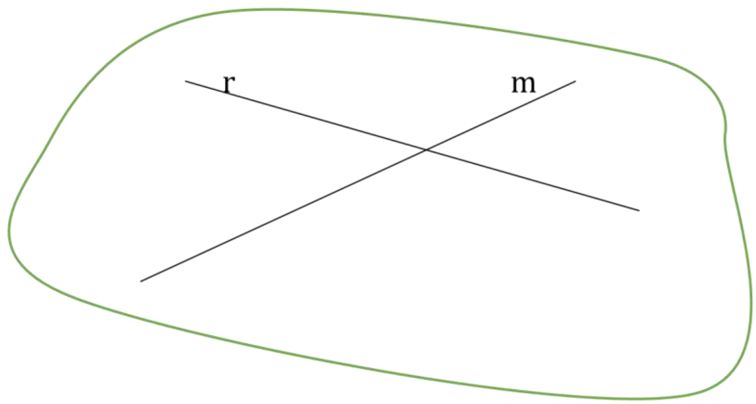
c) $(A, C, D) \equiv \pi$ C

d) $r \cap m = \{C\}$ ●D ●M

e) $A \in m$ ●A ●E

f) $(A, D) \equiv m\ \pi$

g) $(r, E) \equiv \pi$



2) En los siguientes enunciados complete con las palabras, punto, recta y plano.

a) Dados dos puntos distintos existe una y solo una................a la cual pertenecen.

b) Si dos puntos están en un plano, entonces……………que los contiene esta en el mismo……

c) Un………….contiene por lo menos tres puntos no colineales.

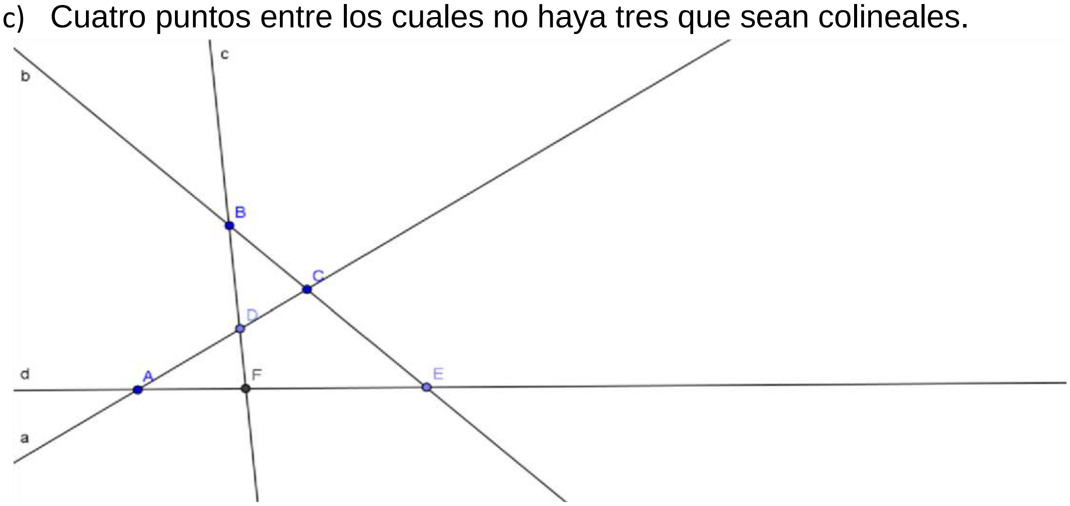
d) Si dos planos se intersecan, se intersecan exactamente en una………..

e) Una recta y un………..que no pertenece a ella, determinan un……….al cual pertenecen 3) Nombre:

a) Conjuntos de tres puntos no colineales.

b) Conjuntos de tres puntos colineales.

c) Cuatro puntos entre los cuales no haya tres que sean colineales.

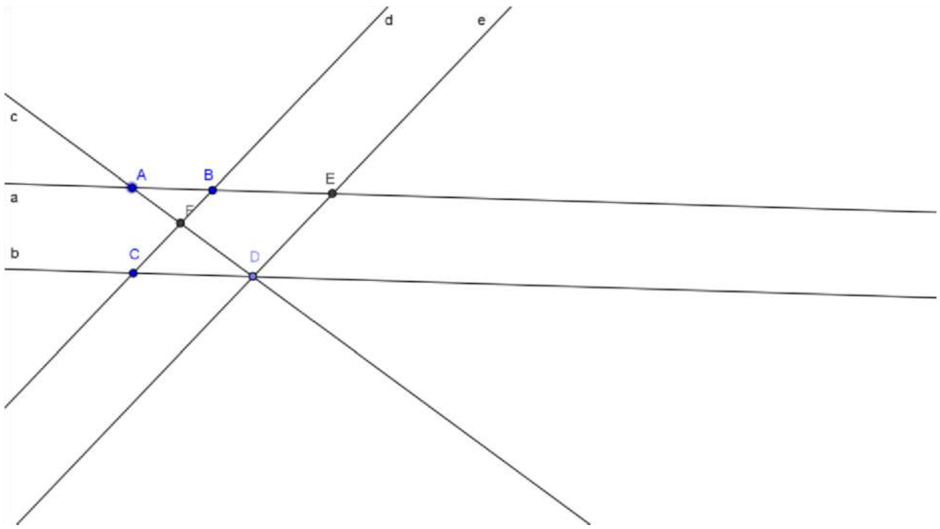


4) Enumere:

a) Tres pares de rectas intersecantes.

b) Tres rectas concurrentes.

c) Todos los pares de rectas paralelas.



5) Aplicación de Axiomas de Enlace o Incidencia: Dados 7 puntos no colineales 3 a 3. ¿Cuántas rectas ellos determinan? Si consideras n puntos no colineales 3 a3, ¿Cuántas rectas determinan?

6) Se dan tres puntos distintos de un plano:

a) ¿Es suficiente este dato para asegurar cuantas rectas determinan?

b) ¿Cómo deben estar ubicados para obtener el mayor número de rectas?

c) ¿Cómo deben estar ubicados para obtener el menor número de rectas?

UNIDAD 3: TRIGONOMETRÍA

TRIGONOMETRÍA

Hiparco de Nicea
(190-120 *a. C.*)

Rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los ángulos y lados en cualquier triángulo.

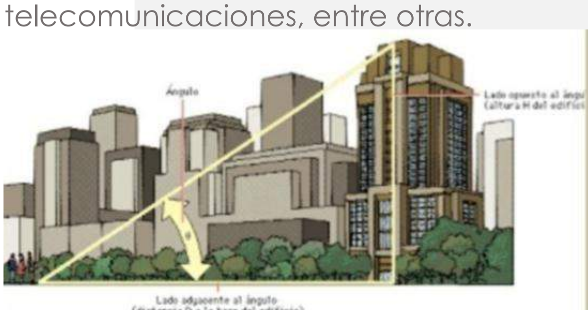
Desde hace más de 3000 años los babilonios y los egipcios fueron los primeros en utilizar los ángulos y las razones trigonométricas para efectuar medidas en la agricultura, así como para la construcción de pirámides.

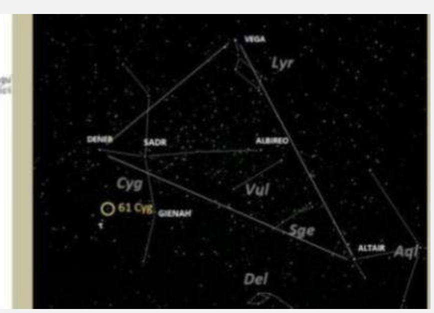
Hiparco de Nicea

Astrónomo, matemático y geógrafo griego nacido en Nicea. Uno de los principales desarrolladores de la trigonometría (plana y esférica), construyó tablas que relacionaban los ángulos centrales con las cuerdas delimitadas por su ángulo central correspondiente. Gracias a esta tabla, equivalente a una tabla de senos actual, logró relacionar los lados y ángulos en cualquier triángulo plano.

Aplicaciones…

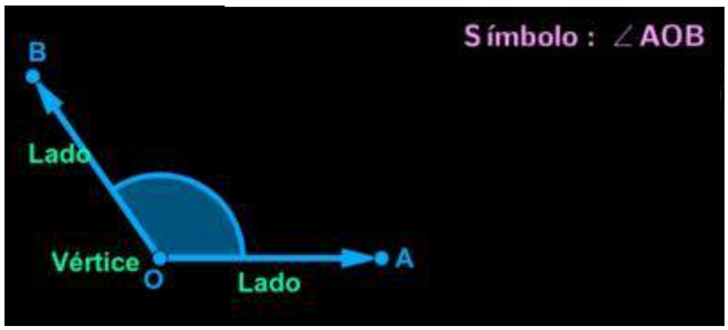
Muchas veces no nos damos cuenta de la importancia de la trigonometría en nuestra vida, sin embargo, la funciones trigonométricas son muy importantes para el ser humano porque con ellas podemos calcular distancias entre cuerpos celestes, distintos sitios geográficos e implementarlo en los localizadores satelitales (GPS), al igual que son necesarias para construir diversas edificaciones, inclusive el peralte de las carreteras; siendo de gran relevancia en áreas como la física, astronomía, cartografía , náutica, telecomunicaciones, entre otras.





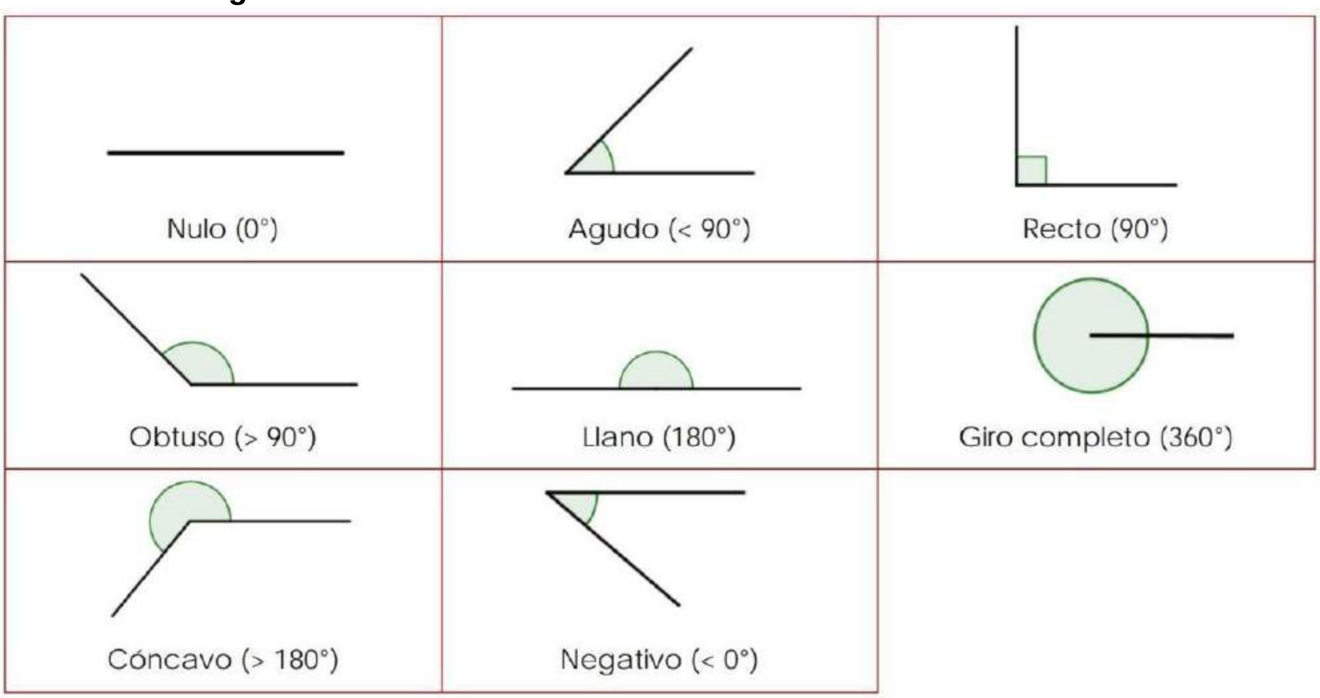
ÁNGULOS

Es una figura formada por dos semirrectas que se interceptan en un punto. Las semirrectas son los lados del ángulo, y el punto de intersección su vértice.

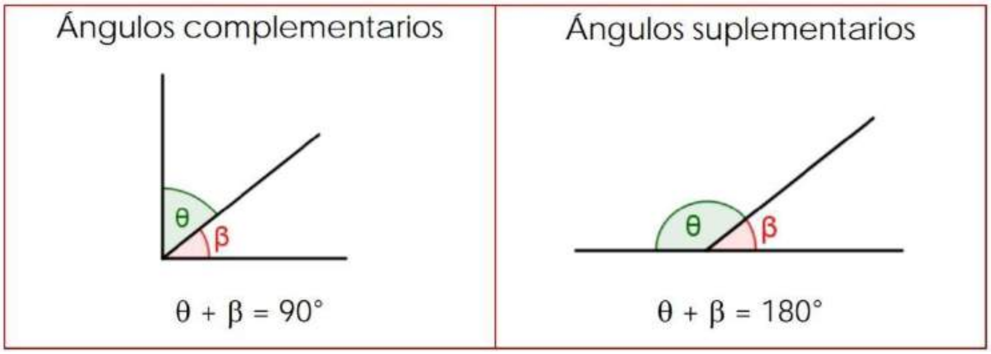


La amplitud del giro de un ángulo se puede medir, y la unidad que se utiliza para expresarlo se llama grado.

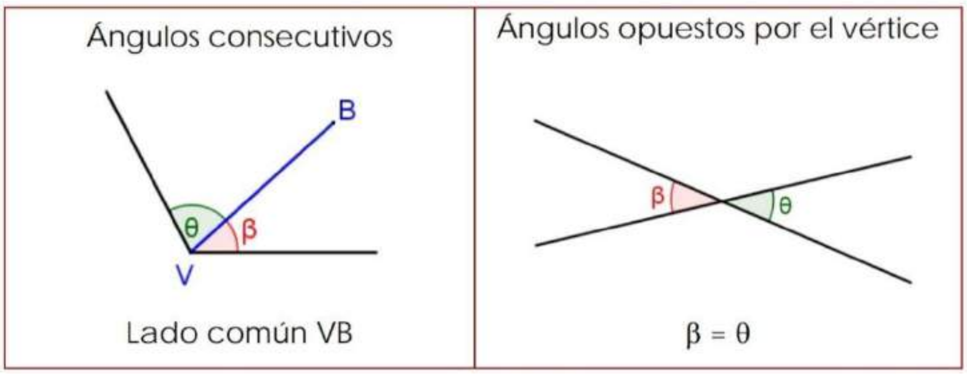
Clasificación según su medida:



Según su característica



Según su posición



LA MEDIDA DE LOS ÁNGULOS

Existen dos sistemas generalmente usados para medir los ángulos.

- **SISTEMA SEXAGESIMAL:** la unidad de medida en este sistema es el grado sexagesimal (1°), que se obtiene de dividir el ángulo recto en 90 partes iguales.

$$1° = \frac{1R}{90} \rightarrow 1\ Recto = 90°$$

Submúltiplos del grado:

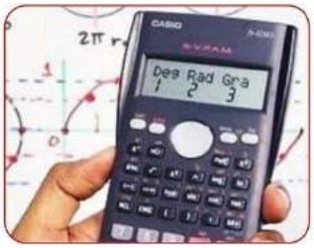
Minuto sexagesimal 1’= $\frac{1°}{60}$ $\rightarrow$ $1° = 60'$

Segundo sexagesimal 1’’ = $\frac{1}{60}$ $\rightarrow$ $1' = 60''$

$$1° = 60´ \wedge 1´ = 60" \Longrightarrow 1° = 3.600"$$

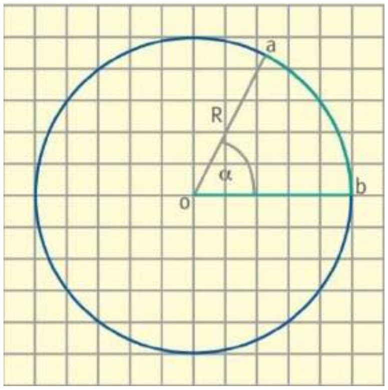
En este sistema, un ángulo cualquiera se especifica colocando el valor del ángulo y agregando ° ′ ". Por ejemplo $\alpha = 32°$, $\beta = 45°25'47"$.

En las calculadoras, cuando queremos trabajar en grados sexagesimales, debemos elegir el modo adecuado, que se denota por **DEG.**



- **SISTEMA CIRCULAR:** en este sistema la unidad de medida es el radián.

Para trabajar con la calculadora, debemos elegir el modo adecuado, que se denota por **RAD**. Se llama **radián** al ángulo central que abarca un arco de circunferencia, cuya longitud es igual es igual al radio de la misma



$$r = \overline{ob}$$
$$\widehat{ab} = \overline{ob}$$
$$\alpha = 1 \text{ radián}$$
$$\alpha = \frac{\widehat{ab}}{\overline{ob}}$$

EQUIVALENCIA ENTRE LOS SISTEMAS

En la siguiente tabla figuran algunas equivalencias entre los dos sistemas de medición de ángulos.

Sistema sexagesimal	Sistema circular
90°	$\frac{\pi}{2}$
180°	π
270°	$\frac{3}{2}\pi$
360°	2π

Ejemplo: Expresar en radianes $60°$

Trabajando con la segunda fila de la tabla, podemos decir:

$$180°\_\_\_\_\_\pi$$

$$60°\_\_\_\_x$$

$$\boldsymbol{x} = \frac{60° \times \pi}{180°} = \frac{\pi}{3} \approx 1{,}05rad$$

$$\therefore 60° = \frac{\pi}{3}$$

Trabajo Práctico Nº 1

1) Marque con una **x** las opciones correctas
   a. ¿Cuál es el ángulo equivalente a $\frac{\pi}{6}$? $20°$ …. $15°$ …. $60°$ …. $30°$ ….
   b. ¿Cuál es el ángulo equivalente a 45 °? $\frac{\pi}{2}$ …. $\frac{\pi}{4}$ …. $\frac{\pi}{3}$ …. 45π ….
   c. ¿Cuáles ángulos son agudos? $100°$ …. $\frac{\pi}{8}$ …. $\frac{2\pi}{5}$ …. $10°$ …
2) Los siguientes ángulos están dados en radianes. Expréselo en el sistema sexagesimal:
   a. $\frac{\pi+1}{6} =$
   b. $\frac{7\pi}{5} =$
   c. $1{,}6 =$
   d. $6{,}28 =$
   e. $2{,}75\pi =$
   f. $1{,}5\pi =$
3) Exprese los siguientes ángulos en radianes, en función de π.
   a. $120° =$
   b. $315° =$
   c. $100° =$
   d. $225° =$
   e. $45{,}6° =$
   f. $125°23'19'' =$
4) Escriba V (verdadero) o F (falso) según corresponda. En caso de ser falso, explique.
   a. $90° = \frac{\pi}{2}$

   ……………………………………………………….
   b. $82{,}5° = 82°50`$

   ………………………………………………………

c. $180°\pi = 180°$

…………………………………………………………

d. $120° = \pi + \frac{\pi}{2}$

…………………………………………………………

e. $\frac{7\pi}{4} - \pi = 135°$

…………………………………………………………

f. $\frac{1}{6}\pi + \frac{1}{4}\pi = 75°$

…………………………………………………………

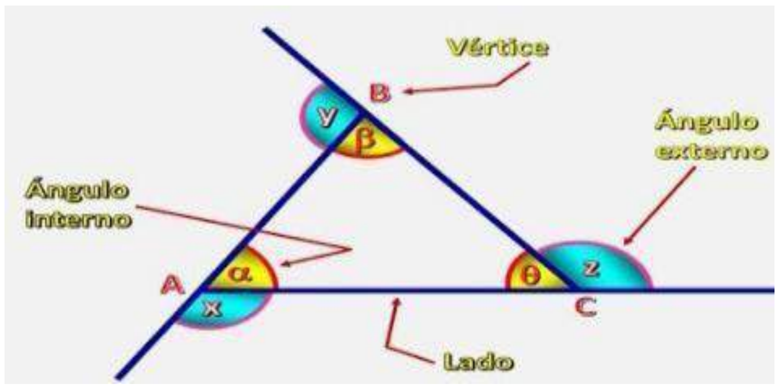
g. $21°4'' = 75840''$

……………………………………………………....

5) Un ángulo de 1,5 radianes ¿es menor, igual o mayor a un recto?
6) El planeta Mercurio completa una rotación sobre su eje cada 59 días. ¿Qué ángulo (medido en grados) gira en a. 1 día terrestre, b. 1 hora?
7) La tierra gira sobre su eje una vez cada 24 hs. ¿Cuánto tarda en girar un ángulo de a. $240°$ y b. $\frac{\pi}{6}$?
8) En los siguientes apartados calcule un ángulo que sea complementario y suplementario del ángulo indicado, o diga por qué no puede calcularse ese ángulo. a. $48{,}25°$
   b. $93°$
   c. $63{,}08°$
   d. $\frac{\pi}{4}$
   e. $\frac{\pi}{6}$
   f. $\frac{3\pi}{4}$

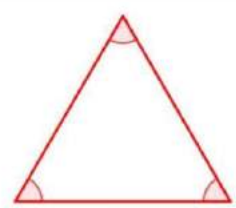
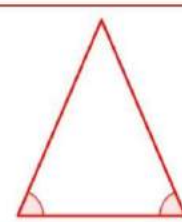
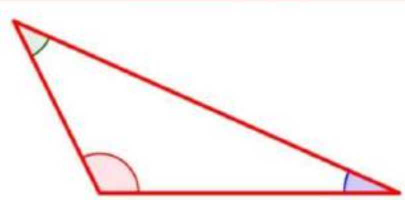
TRIÁNGULOS

Un triángulo es una superficie plana delimitada por tres segmentos de recta.
Los elementos del triángulo son: tres vértices, tres lados, tres ángulos interiores y exteriores.
La suma de la medida de los tres ángulos internos es $180°$. A cada ángulo interno del triángulo le corresponde un ángulo exterior. La medida de cada ángulo exterior es igual a la suma de la medida de los dos ángulos interiores no adyacentes. La suma de la medida de los tres ángulos exteriores es $360°$

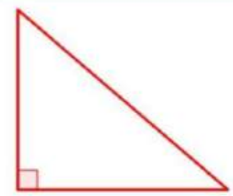
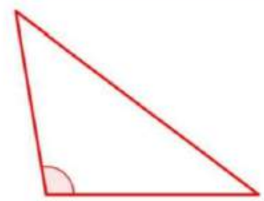
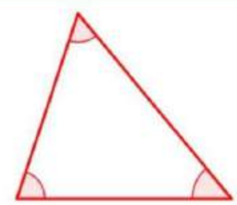


<u>Clasificación</u>

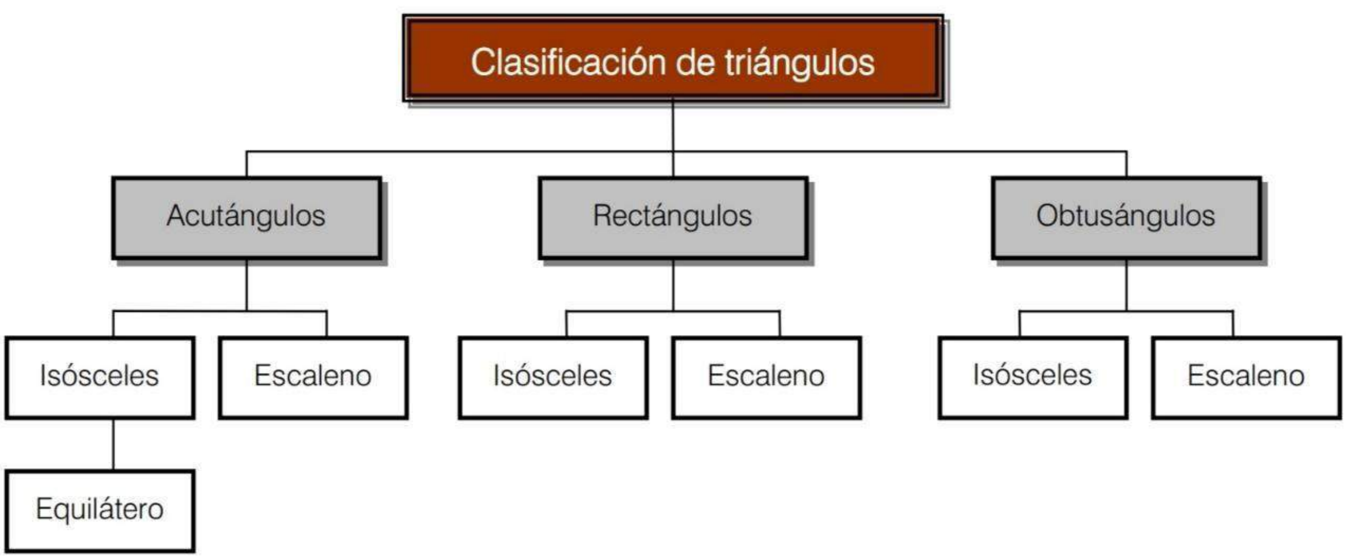
Según sus lados

Triángulo equilátero: tiene tres lados iguales y sus ángulos internos miden 60°.	
Triángulo isósceles: tiene dos lados iguales; los ángulos que se oponen a estos también son iguales.	
Triángulo escaleno: todos sus lados son distintos al igual que todos sus ángulos internos.	

Según sus ángulos

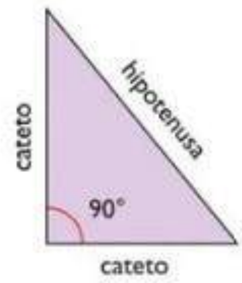
Triángulo Rectángulo: tiene un ángulo interior recto (90°). A los dos lados que conforman el ángulo recto se les denomina catetos y al otro lado hipotenusa.	
Triángulo obtusángulo: uno de sus ángulos es obtuso (mayor de 90°); los otros dos son agudos (menor de 90°).	
Triángulo acutángulo: sus ángulos interiores son agudos; el triángulo equilátero es un caso particular de triángulo acutángulo.	

Un triángulo puede estar en más de una clase, como se muestra en el siguiente esquema:

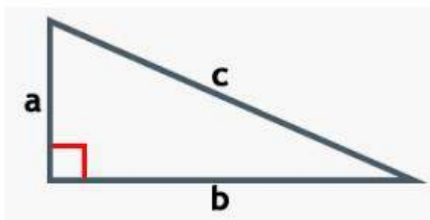


TEOREMA DE PITÁGORAS

En un triángulo rectángulo, los lados reciben nombres especiales.

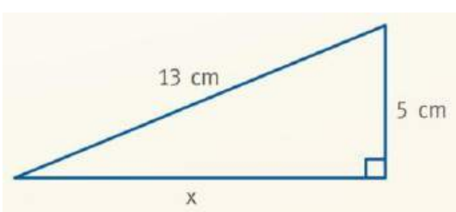


> En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Cuando se conocen las medidas de dos lados de un triángulo rectángulo, se puede encontrar la medida del que falta aplicando el teorema de Pitágoras.

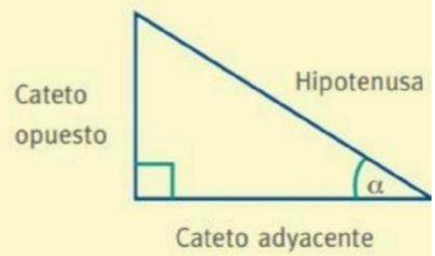


$$x^2 + (5\ cm)^2 = (13\ cm)^2$$
$$x^2 = 169\ cm^2 - 25\ cm^2$$
$$x = \sqrt{144\ cm^2}$$
$$x = 12\ cm$$

RAZONES TRIGONOMETRICAS

Uno de los objetivos de la trigonometría es mostrar la dependencia existente entre los lados y los ángulos de un **triángulo rectángulo**, y para este objeto se emplean las razones trigonométricas, las cuales se definen a continuación.

Razones directas		Razones recíprocas
$\text{sen}\ \hat{\alpha} = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	$\rightarrow$	$\text{cosec}\ \hat{\alpha} = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$
$\cos\ \hat{\alpha} = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$	$\rightarrow$	$\sec\ \hat{\alpha} = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$
$\text{tg}\ \hat{\alpha} = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$	$\rightarrow$	$\text{cotg}\ \hat{\alpha} = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$

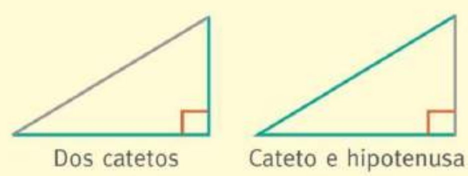


Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo rectángulo, consiste en averiguar la longitud de sus tres lados y la amplitud de sus ángulo.
Un triángulo queda determinado con dos de sus lados o con un lado y uno de sus ángulos agudos.

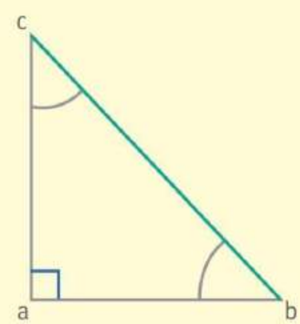
Resolución de triángulos rectángulos

- Dados dos catetos o un cateto y la hipotenusa.



Datos: $\begin{cases} \overline{bc} = 12{,}1 \text{ cm} \\ \overline{ab} = 8{,}6 \text{ cm} \end{cases}$

Hallen $\hat{b}$, $\hat{c}$ y $\overline{ac}$.



Para calcular $\overline{ac}$ se puede aplicar el teorema de Pitágoras:

$$\overline{bc}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{ac}^2 \Rightarrow \overline{ac} = \sqrt{\overline{bc}^2 - \overline{ab}^2} \Rightarrow \overline{ac} = \sqrt{(12{,}1 \text{ cm})^2 - (8{,}6 \text{ cm})^2} \Rightarrow$$
$$\overline{ac} = \sqrt{146{,}41 \text{ cm}^2 - 73{,}96 \text{ cm}^2} \Rightarrow \overline{ac} = \sqrt{72{,}45 \text{ cm}^2} \Rightarrow \overline{ac} \cong 8{,}51 \text{ cm}$$

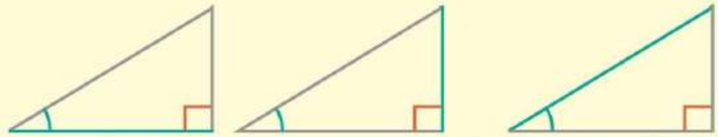
Para calcular $\hat{c}$ se debe recurrir a una función trigonométrica que vincule los datos con el ángulo:

$$\text{sen}\ \hat{c} = \frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} \Rightarrow \text{sen}\ \hat{c} = \frac{8{,}6 \text{ cm}}{12{,}1 \text{ cm}} \Rightarrow \hat{c} = \text{arc sen}\ 0{,}71 \Rightarrow \hat{c} \cong 45^\circ\ 17'\ 43{,}7''$$

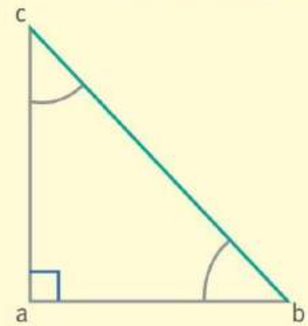
Para calcular $\hat{b}$ se razona de forma análoga:

$$\cos\ \hat{b} = \frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} \Rightarrow \cos\ \hat{b} = \frac{8{,}6 \text{ cm}}{12{,}1 \text{ cm}} \Rightarrow \hat{b} = \text{arc cos}\ 0{,}71 \Rightarrow \hat{b} \cong 44^\circ\ 42'\ 16{,}3''$$

- Dados un ángulo agudo y uno de sus lados.



Ángulo agudo y cateto   Ángulo agudo e hipotenusa



Datos: $\begin{cases} \hat{b} = 35^o \\ \overline{ab} = 12 \text{ cm} \end{cases}$

Hallen $\hat{c}$, $\overline{ac}$ y $\overline{bc}$.

Para calcular $\hat{c}$ se aplica la propiedad de los ángulos agudos:

$$\hat{c} + \hat{b} = 90^o \Rightarrow \hat{c} = 90^o - \hat{b} \Rightarrow \hat{c} = 90^o - 35^o \Rightarrow \hat{c} = 55^o$$

Para calcular $\overline{ac}$ se debe recurrir a una función trigonométrica que vincule los datos con el lado:

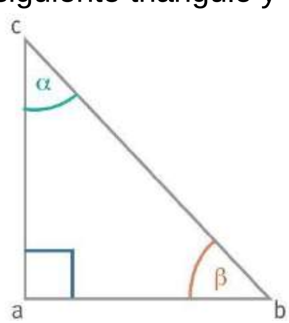
$$\text{tg } \hat{b} = \frac{\overline{ac}}{\overline{ab}} \Rightarrow \overline{ac} = \overline{ab} \cdot \text{tg } \hat{b} \Rightarrow \overline{ac} = 12 \text{ cm} \cdot \text{tg } 35^o \Rightarrow \overline{ac} \cong 8{,}4 \text{ cm}$$

Para calcular $\overline{bc}$ se razona en forma análoga:

$$\cos \hat{b} = \frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} \Rightarrow \overline{bc} = \frac{\overline{ab}}{\cos \hat{b}} \Rightarrow \overline{bc} = \frac{12 \text{ cm}}{\cos 35^o} \Rightarrow \overline{bc} \cong 14{,}65 \text{ cm}$$

Trabajo práctico Nº 2

1) Tenga en cuenta el siguiente triángulo y complete.



a. sen $\hat{\alpha}$ =

b. cos $\hat{\alpha}$ =

c. tg $\hat{\alpha}$ =

d. cosec $\hat{\alpha}$ =

e. sec $\hat{\alpha}$ =

f. cotg $\hat{\alpha}$ =

g. sen $\hat{\beta}$ =

h. cos $\hat{\beta}$ =

i. tg $\hat{\beta}$ =

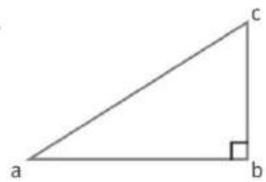
j. cosec $\hat{\beta}$ =

k. sec $\hat{\beta}$ =

l. cotg $\hat{\beta}$ =

2) Resuelva los siguientes triángulos rectángulos.

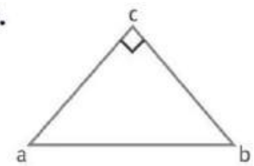
a.



$\overline{ab} = 10{,}5$ cm
$\overline{bc} = 7{,}2$ cm

$\overline{ac} =$ ______ ; $\hat{a} =$ ______ ; $\hat{c} =$ ______

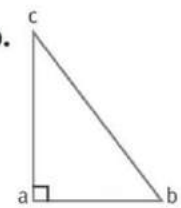
c.



$\overline{cb} = 9{,}2$ cm
$\hat{b} = 32°$

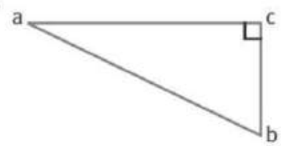
$\overline{ab} =$ ______ ; $\hat{a} =$ ______ ; $\overline{ac} =$ ______

b.



$\overline{ab} = 5{,}5$ cm
$\overline{bc} = 12{,}8$ cm

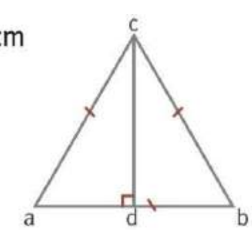
d.



$\overline{bc} = 7{,}3$ cm
$\hat{a} = 61°$

3) Calcule el perímetro de cada triángulo

a. $\overline{cd} = 6$ cm



Perímetro = ______

b. $\overline{ad} = 7$ cm
$\hat{c} = 40°$

Perímetro = ______

4) Lea atentamente, realice un gráfico que represente la situación y resuelva.
   a. Una escalera de 5,5 cm se apoya en una pared formando un ángulo con el piso de 71°. ¿A qué altura de la pared llega la escalera?

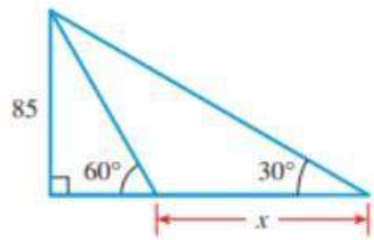
b. Se debe colocar una rampa de 2,8 m de largo para facilitar el acceso a un edificio, cuya entrada se encuentra a 1,2 m de altura. ¿Qué ángulo forma la rampa con el suelo?

c. Un poste de electricidad de 5 m de altura tiene que sujetarse con dos tensores desde su extremo superior hasta el piso. Si los tensores deben formar ángulos de $50°$ con el suelo, ¿Cuántos metros se necesitan?

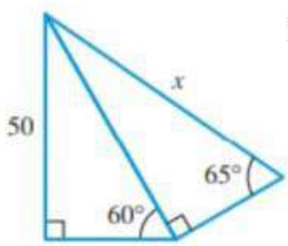
d. En un triángulo de 55 mm de base, se traza su diagonal. La diagonal trazada mide 305 mm ¿Cuánto mide la altura del rectángulo?

e. ¿Cuál es el perímetro de un triángulo isósceles cuya base mide 40 cm, y cuyos ángulos de base miden $70°$? 5) Encuentre el valor de x.

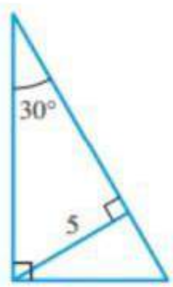
a.



b.



c.



x